

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИ-
ТЕТ

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания по теме
“Основы матричного исчисления”

Факультет инженерно-строительный
Для всех специальностей

Вологда 1999

УДК:517.3

Высшая математика: Методические указания и контрольные задания по теме “Основы матричного исчисления”.— Вологда: ВоГТУ, 1999. – 28 с.

В методических указаниях рассматриваются основные типы задач по теме “Основы матричного исчисления”, изучаемой в первом семестре студентами инженерно-строительного факультета Вологодского государственного технического университета дневной формы обучения. Разобраны решения всех типов задач. Контрольные задания содержат варианты задач для самостоятельного решения.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составитель: Н.В.Степанова, канд. физ.-мат. наук, доц.

Рецензент: А.А.Аваев, канд. техн. наук, доц. кафедры
высшей математики ВоГТУ.

Введение

Цель данных методических указаний заключается в том, чтобы выработать у студентов навыки работы с матрицами, определителями и на базе этих навыков научиться их матричным методам решения такой классической задачи, как решение систем линейных уравнений.

I. Действия над матрицами

Первое задание направлено на то, чтобы отработать правила сложения матриц, умножения их на число или другую матрицу. Напомним основные теоретические сведения.

Матрица размерности $m \times n$ – это таблица из $m \cdot n$ чисел, имеющая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если $m = n$, то матрица называется квадратной.

1. Две матрицы равны, если они имеют одинаковую размерность и все их соответствующие элементы равны.

2. Транспонирование матрицы A размерности $m \times n$ – это преобразование ее строк в столбцы и, соответственно, столбцов в строки. Если матрица не квадратная, то ее размерность при транспонировании меняется (параметры размерности меняются местами, т.е., если A имела размерность $m \times n$, то A^T будет иметь размерность $n \times m$).

3. Складывать можно только матрицы одинаковой размерности и сложение производится поэлементно, т.е., если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то

$$A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \text{где } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

4. Умножение матрицы на число также производится поэлементно, т.е., если

$$A = (a_{ij}), \quad \text{то } \lambda A = (\lambda a_{ij}), \quad \text{где } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

5. Перемножать можно только согласованные по размерности матрицы, т.е., если

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times k}, \quad \text{то можно найти их произведение}$$

$$A \cdot B = A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times k}, \quad \text{где } c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Напомним, что матрица A называется согласованной с матрицей B для произведения AB , если число столбцов A равно числу строк B . Следует подчеркнуть, что квадратные матрицы одного порядка всегда согласованы для умножения.

Пример. Выполнить действия над матрицами: $AB - (2A + B)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \\ 0 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 9 & 0 \cdot 8 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 9 & 4 \cdot 8 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 7 + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 23 & 29 \\ 11 & 5 & -8 \\ -25 & 27 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ -1 & -4 & 9 \\ 17 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB - (2A + B) = \begin{pmatrix} 21 & 23 & 29 \\ 11 & 5 & -8 \\ -25 & 27 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ -1 & -4 & 9 \\ 17 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 11 & 26 \\ 12 & 9 & -17 \\ -42 & 22 & -22 \end{pmatrix}.$$

Опыт показывает, что перемножение матриц вызывает у студентов наибольшие затруднения, поэтому для приобретения необходимых навыков в перемножении матриц рекомендуем воспользоваться следующей схемой. Рассмотрим её на конкретном примере. Пусть требуется найти произведение матриц $A \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые так же, как вы рисуете прямоугольную систему координат на плоскости. В третий координатный угол поместите матрицу A , а в первый – матрицу B . Обратите внимание! Матрицы должны быть расположены именно так: левая матрица A – в левой полуплоскости внизу, а правая B – в правой полуплоскости вверху. Итоговая матрица C будет располагаться в четвертом координатном угле.

			- 4	8	- 3
			- 1	0	7
			9	5	6
1	2	3	⊗	⊗	⊗
0	- 2	1	⊗	⊗	⊗
4	0	- 1	⊗	⊗	⊗

$$c_{11} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 21$$

$$c_{23} = 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 6 = -8$$

$$c_{33} = 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 7 + (-1) \cdot 6 = -18$$

Выберите для определенности какой-нибудь элемент матрицы C , например, c_{11} . От этого элемента влево проведите горизонталь, а вверх – вертикаль. Горизонталь подчеркнёт ту строку матрицы A , которая будет использована для вычисления выбранного элемента матрицы C . Очевидно, что для элемента c_{11} это будет первая строка матрицы A . Вертикаль вверх от c_{11} выделит столбец второй матрицы B , а именно, первый столбец. Далее для вычисления c_{11} нужно перемножить элементы первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B и полученные произведения сложить. Аналогичные действия, проведенные для элемента c_{23} , выделяют вторую строку матрицы A и третий столбец матрицы B . В общем случае для вычисления элемента c_{ij} нужно все элементы i -той строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B и полученные произведения сложить. Ясно, что эту процедуру придется повторить столько раз, сколько элементов у матрицы C .

Заметим, что в произведении матрицы в общем случае неперестановочны, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Это означает, что при преобразовании матричных выражений нужно строго следить за правильной записью матриц в произведении.

Правило умножения легко распространяется и на случай произведения любого конечного числа матриц. Нужно только следить, чтобы в произведении сомножители были расположены так, чтобы каждая предыдущая матрица была согласована с последующей по размерности. Например, $\begin{matrix} A & \cdot & B & \cdot & C \\ m \times n & n \times k & k \times s \end{matrix} = \begin{matrix} A & \cdot & B & \cdot & C \\ m \times \boxed{n \ n} & \times & \boxed{k \ k} & \times & s \end{matrix}$

Пример. Найти матрицу ABC^T , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} A \cdot B \cdot C^T \\ 1 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для квадратных матриц определена операция возведения в целую положительную степень. Так, в частности, $A^2 = A \cdot A$, а $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Пример. Вычислить $\varphi(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = -3x^2 + 2x - 5.$$

Решение. $\varphi(A) = -3A^2 + 2A - 5E =$

$$\begin{aligned} &= -3 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -3 \begin{pmatrix} 7 & -11 & 6 \\ -4 & 7 & -1 \\ -1 & 6 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 27 & -16 \\ 10 & -22 & 3 \\ 9 & -16 & -45 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Большинству первокурсников хорошо знаком метод исключения неизвестных для решения систем линейных уравнений 2-го порядка. Цель второго задания заключается в том, чтобы студенты освоили матричную реализацию этого метода. Для этого разберем конкретный пример.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 4; \\ 5x + 2y + 13z = 2; \\ 3x - y + 5z = 0. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего перейдем на матричный язык, для чего выпишем так называемую расширенную матрицу системы

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 13 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Здесь A – матрица коэффициентов при неизвестных, а B – столбец свободных членов. Заметим, что вертикальная черта в символьной записи $A|B$ и в развернутой записи этой матрицы служит только для того, чтобы зрительно отделить столбец свободных членов.

Исключение неизвестных в исходной системе на матричном языке означает преобразование матрицы $A|B$ к трапецевидной форме, когда все элементы под элементами главной диагонали равны нулю, т.е. к виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \end{array} \right).$$

Это действие осуществляется с помощью элементарных преобразований над строками матрицы:

1. перестановка строк;
2. умножение любой строки на произвольное ненулевое число;
3. прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Наиболее часто используется третье преобразование, в котором своеобразным орудием труда является строка, у которой первый элемент равен единице. Если таковой строки нет, то её нужно сделать. Первое, что приходит в голову – поделить все элементы какой-либо строки, например, первой на её первый элемент (конечно, если он отличен от нуля). Именно это действие запрограммировано в машинной реализации метода Гаусса. В результате этого деления почти все элементы преобразуемой строки становятся дробными. В машинном варианте это десятичные дроби с конечным числом знаков после запятой. Естественно, что решение системы получается приближенным.

Когда мы решаем систему методом Гаусса вручную, то стараемся, во-первых, получить точное решение, а, во-вторых, “не утонуть” в громоздких вычислениях. Если не переходить к десятичным дробям, а работать с рациональными дробями, то сложность вычислений очень быстро нарастает. Поэтому целесообразно обойтись без деления для получения строки с единичным первым элементом. Это возможно, потому что при ручном использовании метода Гаусса мы обладаем большей свободой, чем при машинном. Еще раз подчеркнем, что мы можем умножать любую строку на любое ненулевое число, переставлять строки как нам заблагорассудится, складывать или вычитать те строки, которые выгодно. Справедливости ради следует подчеркнуть, что подобные ухищрения возможны при решении систем невысокого порядка и имеют смысл тогда, когда важнее понять идею метода Гаусса, а не именно решить систему.

Используя все сказанное, решим пример. Чтобы избежать многословных объяснений, договоримся об условных обозначениях. Строки (столбцы) преобразуемой на данном шаге матрицы будем нумеровать римскими цифрами I, II, III, IV. Справа от матрицы в рамочке символьно будем записывать те действия, которые мы будем делать над строками. Если действия будут делаться над столбцами, то символьные записи будем делать под столбцами. Перестановки строк (столбцов) указываются стрелочками.

Сначала сделаем строку с единичным первым элементом, для чего вычтем, например, из третьей строки первую. Измененную первую строку переставим на первое место.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & | & 4 \\ 5 & 2 & 13 & | & 2 \\ 3 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{I}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & | & 4 \\ 5 & 2 & 13 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} - \text{I} \times 5 \\ \text{III} - \text{I} \times 2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 5 & 2 & 13 & | & 2 \\ 2 & -1 & 5 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} - \text{I} \times 5 \\ \text{III} - \text{I} \times 2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 2 & 13 & | & 22 \\ 0 & -1 & 5 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & -1 & 5 & | & 12 \\ 0 & 2 & 13 & | & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & -1 & 5 & | & 12 \\ 0 & 0 & 23 & | & 46 \end{pmatrix}$$

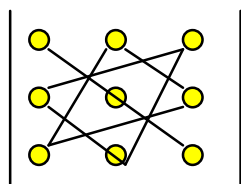
Всё! Трапециевидная матрица получена. Настало время от матрицы вернуться к системе, краткой записью которой является эта матрица.

$$\begin{cases} x = -4; \\ -y + 5z = 12; \\ 23z = 46. \end{cases}$$

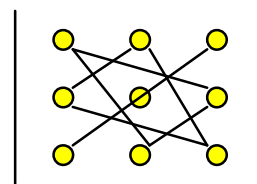
Из третьего уравнения системы получаем $z = 2$. С учетом этого из второго уравнения находим $y = -2$. Первое уравнение дает $x = -4$.

III. Вычисление определителей.

Цель второго задания – выработать навыки вычисления определителей. Приведенные определители 4-го порядка имеют специфическую структуру – они построены путем окаймления квадратной матрицы 2-го порядка единичными матрицами 2-го порядка. Такой тип определителя выбран исключительно для того, чтобы наглядно продемонстрировать рациональные способы преобразования определителей. В частности, на них удобно показать, что выгоднее всего раскладывать определитель по той строке (столбцу), в которых больше всего нулей. Для вычисления получающихся при этом определителей 3-го порядка необходимо использовать мнемоническое правило, которое наглядно иллюстрируется с помощью двух схем.



Произведения, которые
складываются



Произведения, которые
вычитаются

Схема 1 указывает, как строятся произведения из трех элементов определителя, которые в формулу определителя входят со своим собственным знаком, (т.е. складываются), а схема 2 указывает, как строятся произведения, которые входят с противоположным знаком (т.е. вычитаются).

Вычисление определителя 2-го порядка производится по схеме

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} \diagdown & \diagup \\ a_{11} & a_{12} \\ \diagup & \diagdown \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

Словесно эта схема формулируется так : чтобы вычислить определитель квадратной матрицы 2-го порядка нужно из произведения элементов главной диагонали матрицы **A** вычесть произведение элементов побочной диагонали.

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка, разложив его по какой-либо строке (или столбцу) на сумму определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{ / разложим этот определитель, например, по третьей строке /}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 2) + 1 \cdot (14 + 0 + 0 - 0 - 7 + 3) = -1 + 10 = 9.$$

Вычисление того же самого определителя 4-го порядка с предварительным преобразованием его к треугольному виду преследует две цели: во-первых, научить студентов универсальному способу нахождения определителей любого порядка и, во-вторых, отработать применение некоторых свойств определителя. Имеются ввиду следующие свойства:

1. при перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;
2. общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
3. определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Эти свойства позволяют данный определитель 4-го порядка преобразовать к треугольному виду, а такой определитель, как известно, равен произведению элементов главной диагонали.

Пример. Вычислить определитель, приведенный в предыдущем примере.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \boxed{\text{II} + \text{I} \times 3} \\ \boxed{\text{III} - \text{I} \times 7} \end{array} = - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = \\
 & = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \boxed{\text{III} - \text{II} \times 2} \\ \boxed{\text{IV} - \text{II}} \end{array} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \boxed{\text{IV} - \text{III}} \\ \end{array} = \\
 & = - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right| = 9 .
 \end{aligned}$$

IV. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Цель третьего задания данного пособия – отработать методику решения матричных уравнений типа $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$. Разрешение этих уравнений относительно X производится путем умножения левой и правой частей уравнения на матрицу A^{-1} , обратную матрице A . В силу того, что единственная обратная матрица A^{-1} , удовлетворяющая равенству $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, существует только для невырожденных ($\det A \neq 0$) квадратных матриц, уравнения $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$ однозначно разрешимы только, если A – квадратная матрица и $\det A \neq 0$.

Прежде всего нужно убедиться, что определитель матрицы A отличен от ну-

ля, т.е. $\Delta = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \neq 0$. Формула для вычисления обратной матрицы A^{-1}

имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

Эта формула означает, что для нахождения A^{-1} нужно составить матрицу из алгебраических дополнений A_{ij} всех элементов матрицы A , транспонировать её и умножить на число $\frac{1}{\det A}$. Напомним, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где минор M_{ij} – это определитель, который получается из определителя Δ “вычеркиванием” i -той строки и j -го столбца.

Домножение уравнений $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$ на A^{-1} следует произвести так, чтобы символы A и A^{-1} стояли рядом, причем “вклиниваться” между матрицами A и X нельзя. Это означает, что уравнение $A \cdot X = B$ нужно умножить на A^{-1} слева, а уравнение $X \cdot A = B$ – справа. В результате получим:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Пример. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если обозначить $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то дан-

ное матричное уравнение символически запишется в виде $X \cdot A = B$. Вычислим $\det A$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 20 - 24 + 0 = -4 \neq 0, \end{aligned}$$

следовательно, матрица A невырожденная, а значит существует единственная обратная матрица A^{-1} . Найдем её:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка вычислений:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная единичная матрица подтверждает, что обратная матрица найдена верно.

Напомним, что мы решаем матричное уравнение $X \cdot A = B$. Чтобы получить символы A и A^{-1} рядом, нужно это уравнение $X \cdot A = B$ домножить на A^{-1} справа. В результате получим

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V. Исследование систем на совместность и их решение в случае совместности

Это задание посвящено решению произвольных систем линейных уравнений. Исследование систем на совместность проводится с помощью ранга матрицы. Ранг матрицы находится путем преобразования её в трапециевидную форму. Как известно, ранг трапециевидной матрицы равен числу её ненулевых диагональных элементов. Алгоритм преобразования матрицы в трапециевидную совпадает с алгоритмом метода Гаусса, подробно рассмотренным в разделе 2.

Напомним, что для исследования системы на совместность нам необходимо найти ранги двух матриц: матрицы коэффициентов при неизвестных и расширенной матрицы системы. Если эти ранги не совпадут, то система не имеет решений. Если эти ранги окажутся равными, то система решение имеет, при этом возможны два варианта: если ранг равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример. Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти её решение

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\begin{aligned}
 A|B &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - \text{I} \times 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Трапецевидная матрица получена. Очевидно, что $r_A = r_{A|B} = 2$, следовательно, система совместна. Поскольку $r_A = r_{A|B} = 2$ меньше числа неизвестных $n = 4$, то система имеет бесконечное множество решений. Для того, чтобы получить формулы всех этих решений, от матрицы перейдем к системе, которая за ней стоит. Однако прежде подчеркнем один тонкий момент: для вычисления ранга мы переставляли второй и третий столбцы, что в системе соответствует перестановке переменных $x_2 \leftrightarrow x_3$. Если для решения системы мы будем использовать последнюю трапецевидную матрицу, то при выписывании системы эту перестановку надо обязательно учитывать.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_3 - 2x_2 + 4x_4 = 2; \\ -6x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

x_3

x_2

Последнее уравнение содержит две неизвестных, однозначно оно не решается, поскольку одну из неизвестных придется брать произвольно. Какую именно? В данном случае можно брать любую, поскольку мы решаем абстрактную систему, в которой неизвестные не имеют никакого смыслового значения. Пусть это будет x_4 . Тогда $x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4$. Поднимаемся в первое уравнение и подставим в нем вместо x_3 его выражение через x_4 :

$3x_1 + 4x_4 + 5\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4\right) - 2x_2 = 2 \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{6}x_4 = \frac{7}{6}$. Мы уже определили, что x_4 – свободная переменная, остаются x_1 и x_2 . Одну из них также придется выбирать произвольно, пусть это будет x_2 . Тогда $x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{18}x_4 + \frac{7}{18}$. Выпишем формулы решения системы полностью:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{18}x_4 + \frac{7}{18}; \\x_2 &\in (-\infty; +\infty); \\x_3 &= \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4; \\x_4 &\in (-\infty; +\infty).\end{aligned}$$

Замечание. Если вам не хочется переставлять неизвестные в системе, тогда для решения системы возьмите матрицу, последнюю перед перестановкой столбцов, т.е.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$


Формулы для решения системы выводятся аналогично.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание № 1. Выполнить действия над матрицами.

$$1.1. \quad 2(A+B)(2B-A), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. \quad 3A - (A+2B)B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. \quad \frac{1}{9} \cdot AB \cdot (A+B), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. \quad 3A + AX - BX, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1.5. \quad \text{Найти } \varphi(A), \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = x^2 - x - 3.$$

$$1.6. \quad CBA, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. \quad (BA - C)^5, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. \quad (AB - C) \cdot C^T, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. \quad \frac{1}{3} \cdot A \cdot A^T - A \cdot B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & -7 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. \quad \text{Найти } \varphi(A), \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = x^2 + 3x - 2.$$

$$1.11. \quad (AB + A)^T \cdot A + 2E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. \quad 3 \cdot A - (A + 2 \cdot B) \cdot B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. \quad 2 \cdot (A - B) \cdot (A^2 + B), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. \quad 2 \cdot (A + B) \cdot (2B - A), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.15. \quad \text{Найти } \varphi(B), \text{ если } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = x^2 - 3x + 6.$$

$$1.16. (A - B^2) \cdot (2A + B), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.17. (A - B) \cdot A + 3B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.18. (A - B) \cdot 2A + 2B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.19. (A^2 - B^2) \cdot (A + B), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.20. \text{ Найти } \varphi(A), \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = \frac{2}{9}x^3 - x - 1.$$

$$1.21. 3A - (A + 2B)B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.22. 3(A + B) - (A - B)A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1.23. (AC^T)^2 - B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ -18 & -30 & -42 \\ 12 & 30 & 48 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.24. AA^T + 5E - 0.5B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.25. \text{ Найти } \varphi(A), \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = 2x^2 + 2x + 6.$$

$$1.26. AA^T - \frac{1}{9}BC, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.27. \quad A \left(A^T - \frac{1}{2} B \right) + AB, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -14 & 0 \\ 0 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.28. \quad (A - B^2) \cdot (2A + B), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. \quad 3 \cdot (A^2 - B^2) - 2AB, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.30. \quad \text{Найти } \varphi(C), \text{ если } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ а } \varphi(x) = 2x^2 - x + 5.$$

Задание № 2. Решить систему методом Гаусса.

$$2.1. \quad \begin{cases} x + y - z = -2; \\ 2x + y + 2z = 5; \\ x - y + z = 4. \end{cases}$$

$$2.6. \quad \begin{cases} x - y - 2z = 2; \\ 3x - 4y + z = 0; \\ x + y + 2z = -4. \end{cases}$$

$$2.2. \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ -2x + 3y - z = -8; \\ 3x - 2y + 3z = 11. \end{cases}$$

$$2.7. \quad \begin{cases} 2x + y - z = 7; \\ x - 2y - 2z = 5; \\ 3x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

$$2.3. \quad \begin{cases} 2x - y + z = 4; \\ x + 3y - z = -5; \\ 4x - 2y + z = 8. \end{cases}$$

$$2.8. \quad \begin{cases} x + y + 2z = -3; \\ 4x - y + z = 0; \\ 2x + 3y - z = -2. \end{cases}$$

$$2.4. \quad \begin{cases} x - y - z = 1; \\ x + 2y + z = 2; \\ 3x - 2y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$2.9. \quad \begin{cases} x - y - z = -4; \\ 3x + y + z = -4; \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$2.5. \quad \begin{cases} 3x + y + z = 1; \\ x - y - z = -1; \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$2.10. \quad \begin{cases} 3x + y + z = -13; \\ x - y - 2z = -2; \\ x + 2y + 2z = -6. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} 5x - y + 3z = -4; \\ 2x + y - z = -1; \\ x - 4y + z = -8. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ 3x - y + z = 5; \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} 2x + y + 3z = -6; \\ x - y + 2z = 1; \\ 4x + 3y - z = -8. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} x + y - 3z = 7; \\ 5x - 3y - z = 5; \\ x + 2y - 4z = 10. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} 3x + y + z = -13; \\ x - y - 2z = -2; \\ x + 2y + 2z = -6. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x + 2y + 3z = -3; \\ 3x - y - z = 2; \\ x - 2y + z = 7. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} 2x + 2y - z = -2; \\ 3x - y + 2z = 8; \\ x + 4y + 4z = 5. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} 2x + y + z = 2; \\ 3x - 4y - z = 8; \\ x + 3y - z = 4. \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} x + 2y - z = -7; \\ 3x - 3y + 4z = 13; \\ 5x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} 2x + y - z = 1; \\ 3x - y + 2z = 6; \\ 2x + 3y - z = 3. \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} 3x - 5y + 4z = 5; \\ 2x - 2y + z = 0; \\ 3x + y + z = -1. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x + y + z = -2; \\ 3x - 2y + z = -14; \\ 2x - y - z = -7. \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x + 4y - z = -6; \\ 3x - 5y - z = 12; \\ 2x + y + z = -4. \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} x - y - z = 1; \\ 3x - 4y + z = 0; \\ x + 3y - z = -3. \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} 5x + 2y + z = 4; \\ 3x - y + 3z = 5; \\ x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} 2x + y + z = 0; \\ x - 3y + z = -3; \\ 3x - 4y + 2z = -5. \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} 4x + 2y - z = 7; \\ x - y + 3z = 5; \\ 3x + y + z = 7. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x + y + z = -1; \\ 3x - y + 2z = 2; \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x - 5y + 5z = -3; \\ 3x + y - z = 7; \\ 2x - 4y + z = 3. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0; \\ x - y + 4z = 2; \\ 2x + y - 5z = 1. \end{cases}$$

Задание № 3. Вычислить определитель 4-го порядка двумя способами:

а) разложением по элементам какой-либо строки (или столбца);

б) предварительно преобразовав его к треугольному виду.

$$3.1. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.8. \begin{vmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 \\ -9 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.15. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.2. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.9. \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.16. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.3. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.10. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.17. \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.4. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.11. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.18. \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.5. \begin{vmatrix} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.12. \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.19. \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.6. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.13. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -9 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.20. \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.7. \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.14. \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.21. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.22. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.25. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.28. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.23. \begin{vmatrix} 2-6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.26. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.29. \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.24. \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.27. \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.30. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 4. Решить матричное уравнение.

$$4.1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.6. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 30 \\ 12 & 13 & 20 \\ 11 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$4.7. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 30 \\ 12 & 13 & 20 \\ 11 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$4.3. \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 \\ 21 & 14 & -10 \\ 48 & 2 & 30 \end{pmatrix}$$

$$4.8. X \begin{pmatrix} 22 & 19 & 30 \\ 12 & 13 & 20 \\ 11 & 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 18 & 5 & 10 \\ 17 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.4. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.9. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.10. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4.11. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.12. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4.13. X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$4.14. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4.15. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4.16. \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 10 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$4.17. X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.18. \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.19. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.20. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4.21. X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4.22. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.23. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4.24. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.25. \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.26. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.27. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.28. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.29. X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.30. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание № 5. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти её решение.

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_5 = -3; \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 - 12x_5 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 + 13x_5 = -13. \end{cases} & 5.9. \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_5 = -9; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 16x_5 = 9; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 17x_4 + 3x_5 = -2. \end{cases} \\
 5.2. \quad & \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 19x_4 + 27x_5 = -14; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 9x_5 = 8; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 + 8x_5 = -9. \end{cases} & 5.10. \quad & \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 26x_4 + 13x_5 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 12x_5 = 10; \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 11x_4 - 5x_5 = 9. \end{cases} \\
 5.3. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 11x_5 = 12; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 5; \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 = -9. \end{cases} & 5.11. \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 + x_5 = -2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 16x_4 + 7x_5 = 16. \end{cases} \\
 5.4. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 - 12x_5 = -7; \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 - 6x_5 = 17; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 15x_4 - 3x_5 = -21. \end{cases} & 5.12. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 18x_4 - 16x_5 = 16; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 4; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 11x_4 - 17x_5 = 17. \end{cases} \\
 5.5. \quad & \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 - 12x_4 + 10x_5 = -5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 14x_5 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 18x_5 = 12. \end{cases} & 5.13. \quad & \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 11x_4 - 21x_5 = -1; \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 18x_5 = 36; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \\
 5.6. \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 10x_4 + 4x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 22x_4 - 6x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 15x_4 - x_5 = -10. \end{cases} & 5.14. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 5; \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 13x_4 - 2x_5 = 17; \\ -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 19x_4 + 3x_5 = -29. \end{cases} \\
 5.7. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 + 7x_5 = -4; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 3; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 12x_5 = -1. \end{cases} & 5.15. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases} \\
 5.8. \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 8; \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 14x_4 - 3x_5 = 1; \\ 9x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 10x_4 + x_5 = 7. \end{cases} & 5.16. \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$5.17. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1; \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

$$5.19. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

$$5.20. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$$

$$5.21. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$5.23. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 = -3. \end{cases}$$

$$5.24. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$5.25. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$5.26. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$5.27. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$5.28. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$5.29. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5.30. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т.: Учебник. – М.: Наука, 1978. – Т.2. – 576 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т.: Учеб. пособие для студентов вузов.– М.: Высш. школа, 1980. – Т.1. – 320 с.

Содержание

Стр.

Введение	3
1. Действия над матрицами	3
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.....	7
3. Вычисление определителей	10
4. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы	12
5. Исследование систем на совместность и их решение в случае совместности.....	14
Задачи для контрольных заданий	17
Литература.....	27