

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Методические указания к решению задач по аналитической геометрии

Для студентов всех специальностей

Вологда 2005

Прямая и плоскость: Методические указания к решению задач по аналитической геометрии.– Вологда: ВоГТУ, 2005. – 40 с.

В методических указаниях приведён основной теоретический материал по теме «Прямая и плоскость». Всё изложение сопровождается примерами с подробными решениями и пояснениями. В конце каждого параграфа приведены задачи, которые будут предложены студентам в контрольной работе по указанной теме.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составители: Степанова Н.В., канд. физ.-мат. наук, доцент ВоГТУ,
Раджабов М.Д., канд. физ.-мат. наук, доцент ВоГТУ.

Рецензент: Назимов А.Б., канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры
высшей математики ВоГТУ

ГЛАВА 1. Прямая на плоскости

§ 1 Вступление

Прежде всего оговорим следующее: мы изучаем методы аналитической геометрии, в которой вместо реальной физической точки на плоскости рассматривается пара чисел $(x; y)$ – ее координат, а вместо прямой – ее уравнение, содержащее переменные x и y в первой степени. При этом прямоугольная система координат предполагается уже введенной.

Известны три вида уравнений плоской прямой:

$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой ;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

Эти уравнения при необходимости легко преобразуются друг в друга, и эти преобразования при решении конкретной задачи можно делать многократно.

Прежде, чем приступить к решению конкретных примеров, первый и последний раз в этом пособии вспомним, как нарисовать прямую линию по ее уравнению.

Пример 1. Нарисовать прямую $L: x - 2y - 2 = 0$.

Решение. Самый известный способ – найти две точки, заведомо лежащие на прямой, и провести через них прямую. Выбирать эти точки можно разными способами.

Способ 1. В качестве двух искомых точек возьмем точки пересечения L с осями координат OX и OY . Вычисления оформим в виде таблицы.

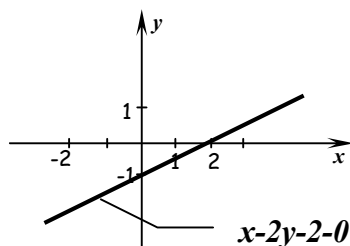


Рис. 1

x	2	0
y	0	-1

Получаем искомые точки: $M_1(2; 0)$ и $M_2(0; -1)$. Искомая прямая изображена на Рис. 1.

Способ 2. Возьмем те же две точки пересечения L с осями координат, но найдем их иначе, без таблицы. Для этого общее уравнение L преобразуем к уравнению в отрезках. Вычисления оформим в виде цепочки преобразований.

$$x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{2y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$$

Учитывая, что под x в знаменателе стоит абсцисса точки пересечения L с осью OX , а под y – ордината точки пересечения с OY , получаем те же две точки, что при первом способе, а именно, $M_1(2; 0)$ и $M_2(0; -1)$.

Замечание. Описанные способы выбора точек удобны не всегда. В част-

ности, когда свободный член C в уравнении $Ax + By + C = 0$ значительно больше коэффициентов A и B , то точки пересечения L с осями OX и OY могут получиться далеко удаленными от начала координат, что неудобно для рисования чертежа. Пусть, например, требуется нарисовать прямую $L : x - 2y - 24 = 0$.

$x - 2y - 24 = 0 \Rightarrow x - 2y = 24 \Rightarrow \frac{x}{24} - \frac{2y}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x}{24} + \frac{y}{-12} = 1$. Для этой прямой точки пересечения с координатными осями – это точки $M_1(24 ; 0)$ и $M_2(0 ; -12)$. В этом случае гораздо удобнее взять два небольших по абсолютной величине значения, например, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и построить таблицу

x	1	2
y	-11.5	-11

§ 2 Задачи, при решении которых используется уравнение прямой $y = kx + b$.

Заголовок этого параграфа вовсе не означает запрет на использование при решении последующих задач общего уравнения прямой и уравнения прямой в отрезках. Он означает только, что будут использоваться формулы, содержащие параметры именно такого вида уравнения прямой.

В этом параграфе мы рассмотрим два типа задач, а именно, задачи на нахождение уравнений падающего и отраженного лучей и задачи на построение уравнения прямой, проходящей под заданным углом к данной прямой.

СПИСОК ФОРМУЛ

■ Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0 ; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1)$$

■ Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1 ; y_1)$ и $M_2(x_2 ; y_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

Частные случаи:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow \frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow x = x_1 - \text{уравнение вертикальной прямой};$$

$$y_2 = y_1 \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0} \Rightarrow y = y_1 - \text{уравнение горизонтальной прямой}.$$

■ **Острый угол между двумя прямыми** $L_1: y = k_1x + b_1$ и $L_2: y = k_2x + b_2$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right| \quad (3)$$

■ **Направленный угол между двумя упорядоченными прямыми:**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \quad (4)$$

■ **Признак параллельности прямых:** $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ (5)

■ **Признак перпендикулярности прямых:** $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (6)

Примеры решения задач

Пример 2. Определить угол между двумя прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$.

Решение. Сначала преобразуем уравнения прямых к уравнениям с угловыми коэффициентами. $L_1: 5x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 5x + 7 \Rightarrow k_1 = 5$;

$$L_2: 3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Предположим, что нас интересует острый ненаправленный угол между данными прямыми, поэтому пронумеровать прямые можно произвольно (у нас они пронумерованы так, как они следуют в формулировке задачи). При этих оговорках тангенс искомого угла нужно находить по формуле (3).

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{(-3/2) - 5}{1 + (-3/2) \cdot 5} \right| = \left| \frac{-13/2}{-13/2} \right| = 1. \quad \text{Следовательно, угол } \varphi = 45^\circ.$$

Пример 3. Определить угол, который прямая $5x - y + 7 = 0$ образует с прямой $3x + 2y = 0$.

Решение. Очевидно, что прямые те же самые, что и в примере 2. Однако теперь уже речь идет о направленном угле. Условия задачи диктуют в качестве первой прямой взять прямую $3x + 2y = 0$. Следовательно, $k_1 = -3/2$. Тогда $k_2 = 5$.

$$\text{Вычислим: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{5 - (-5/3)}{1 + 5 \cdot (-5/3)} = \frac{13/2}{-13/2} = -1. \quad \text{Так как } \operatorname{tg} \varphi < 0, \text{ то прямая}$$

$5x - y + 7 = 0$ образует с прямой $3x + 2y = 0$ тупой положительный угол (против часовой стрелки), значение которого находится по формулам тригонометрии

$$\varphi = \arctg(-1) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

Пример 4. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

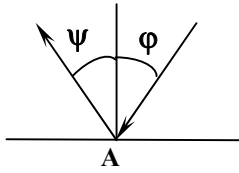


Рис. 2

Решение. Решение этой задачи основано на классическом законе оптики – угол падения равен углу отражения (Рис. 2). Вспомним, как в физике определяются углы падения луча (φ) и угол отражения (ψ). Угол падения φ – это угол между падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к отражающей поверхности в точке отражения. Угол отражения ψ – это угол между отраженным лучом и тем же перпендикуляром. Подчеркнем, что угол рассматривается по абсолютной величине, ненаправленный.

В данном примере физическая задача решается методами аналитической геометрии. В качестве углов падения и отражения мы будем рассматривать не те углы, которые рассматриваются в физике, а углы, которые их дополняют до 90° (Рис. 3). Геометрически нетрудно доказать, что эти углы тоже равны.

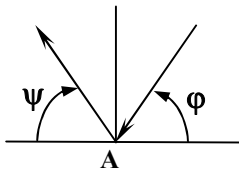


Рис. 3

Таким образом, угол падения φ – это угол между отражающей прямой и падающим лучом; угол отражения ψ – это угол между отражающей прямой и отраженным лучом. Углы φ и ψ будут считаться положительными, если переход от отражающей прямой к падающему (соответственно, отраженному) лучу происходит против часовой стрелки; в противном случае углы считаются отрицательными.

На Рис. 4 изображены условия примера 4. На нем, в частности, видно, что в рассматриваемом примере угол падения φ – отрицателен, а угол отражения ψ – положителен.

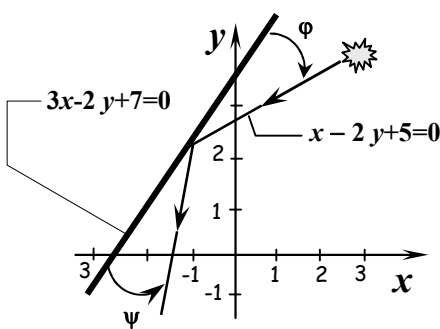


Рис. 4

Сформулируем оптический закон немного иначе: угол падения равен углу отражения по модулю, но противоположен по знаку, т.е.

$$|\varphi| = |\psi|, \text{ но } \varphi = -\psi. \text{ Следовательно,}$$

$$|\operatorname{tg} \varphi| = |\operatorname{tg} \psi|, \text{ но } \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \psi.$$

Продолжим решение задачи. Сначала найдем угол падения φ . Для этого исходные уравнения прямых разрешим относительно y .

$$L_1 : 3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2};$$

$$L_2 : x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{(1/2) - (3/2)}{1 + (1/2) \cdot (3/2)} = -\frac{4}{7}$. Далее найдем тангенс угла отражения

$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{tg} \varphi = -\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7}$. Теперь рассмотрим пару – отражающая прямая и

отраженный луч: $L_1 : y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, значит $k_1 = \frac{3}{2}$, $L_2 : y = k_2x + b_2$, где коэффициент k_2 неизвестен. По той же формуле (4) имеем:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{4}{7} = \frac{k_2 - (3/2)}{1 + k_2 \cdot (3/2)} \Rightarrow k_2 = \frac{29}{2}.$$

Осталось найти точку отражения, как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0; & \text{(I)} \\ 3x - 2y + 7 = 0. & \text{(II)} \end{cases}$

Вычтем из уравнения (II) уравнение (I): $2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1; y = 2$. Тогда точка отражения имеет координаты: $A(-1; 2)$. Окончательно уравнение отраженного луча примет вид: $y - 2 = \frac{29}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{29}{2}x + \frac{33}{2}$ или $29x - 2y + 33 = 0$.

Пример 5. Из точки $A(2; 1)$ направлен луч света под углом 45° к прямой $L: x - 2y - 2 = 0$. Дойдя до этой прямой, луч от нее отразился. Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

Решение. В формулировке задачи величина угла падения дана как в физике, без указания направления. Поэтому возможны два варианта чертежа.

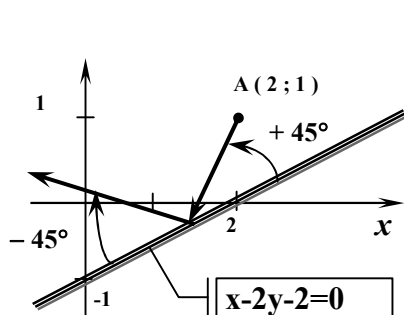


Рис. 5

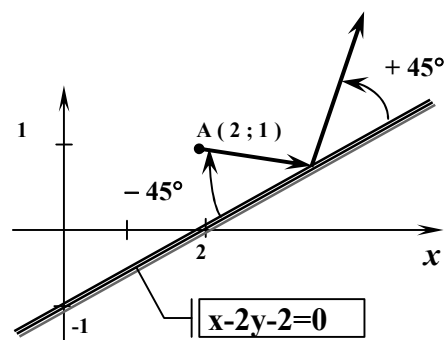


Рис. 6

На Рис. 5 угол падения $\varphi = 45^\circ$, а на Рис. 6 угол $\varphi = -45^\circ$. Уравнения падающего и отраженного лучей будем искать с использованием формулы тан-

генса угла между прямыми (4). Предварительно преобразуем уравнение отражающей прямой к виду с угловым коэффициентом.

$$L_1 : x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$$

Оформим две колонки: левая – для $\varphi = 45^\circ$, правая – для $\varphi = -45^\circ$.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2k_2 - 1}{2 + k_2} = 1 \Rightarrow k_2 = 3$$

Уравнение падающего луча:

$$L : y - 1 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 5$$

Точка отражения B :

$$\begin{cases} x - 2y = 2 ; \\ y = 3x - 5 . \end{cases} \Rightarrow B(1.6 ; -0.2)$$

Угол отражения $\psi = -45^\circ$.

Угловой коэффициент отраженного луча найдем из уравнения:

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = \frac{k_2 - 1/2}{1 + (1/2)k_2} = -1 \Rightarrow$$

$$k_2 = -1/3$$

Уравнение отраженного луча:

$$L' : y + 0.2 = -\frac{1}{3}(x - 1.6)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = \frac{2k_2 - 1}{2 + k_2} = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}$$

Уравнение падающего луча:

$$L : y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Точка отражения B :

$$\begin{cases} x - 2y = 2 ; \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} . \end{cases} \Rightarrow B(3.2 ; 0.6)$$

Угол отражения $\psi = 45^\circ$.

Угловой коэффициент отраженного луча найдем из уравнения:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_2 - 1/2}{1 + (1/2)k_2} = 1 \Rightarrow$$

$$k_2 = 3$$

Уравнение отраженного луча:

$$L' : y - 0.6 = 3(x - 3.2) \\ y = 3x - 9$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 Вычислить тангенс острого угла между прямыми $y = 2x + 1$, $y = 3x + 5$. Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = 1/7$

Задача 2 Вычислить тангенс угла между прямыми $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = -19/4$

Задача 3 Через точку $(2 ; -1)$ провести прямую, образующую положительный угол 45° с прямой $x - 2y - 1 = 0$ Ответ: $3x - y - 7 = 0$

Задача 4 Через точку $(1 ; 2)$ провести прямую, наклоненную к прямой $3x - 2y + 6 = 0$ под углом, тангенс которого равен 5. Ответ: $x + y - 3 = 0$

Задача 5 Через точку $(3; -4)$ провести прямую, наклоненную к прямой $y = -2x + 1$ под углом, тангенс которого равен 2.

Ответ: $7y - x + 31 = 0$

Задача 6 Световой луч, падая из точки $(-3; 4)$ и отражаясь от прямой $y - x = 0$, проходит затем через точку $(-2; 5)$. Написать уравнение луча падающего и луча отраженного.

Ответ: $3x + 4y - 7 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$.

Задача 7 Основание равнобедренного треугольника имеет уравнение $x + 7y - 21 = 0$. Одна из боковых сторон имеет уравнение $4x + 3y - 34 = 0$. Найти уравнение другой боковой стороны, если известно, что она проходит через точку $(8; 9)$.

Ответ: $3x - 4y + 12 = 0$.

Задача 8 Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x - y - 3 = 0$; $x - 7y + 3 = 0$ и точка $(1; 2)$ на его основании. Написать уравнение его основания.

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$.

Задача 9 Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 1)$ под углом 45° к данной прямой.

Ответ: $y = x/5 + 3/5$, $y = -5x + 11$.

Задача 10 Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

Ответ: $3x - 4y + 32 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$.

Задача 11 Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$ и $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.

Ответ: $3x - 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

Задача 12 Точка $E(1; -1)$ является центром квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y + 12 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны квадрата.

Ответ: $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$.

Задача 13 Из точки $M_0(-2; 3)$ под углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Дойдя до оси OX , луч от нее отразился. Составить уравнения прямых, на которых лежат лучи падающий и отраженный.

Ответ: $3x - y + 9 = 0$, $3x + y + 9 = 0$.

Задача 14 Даны уравнения сторон треугольника $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный. Решить задачу с помощью сравнения углов треугольника.

§ 3 Задачи, при решении которых используется общее уравнение прямой.

СПИСОК ФОРМУЛ

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид $Ax + By + C = 0$. Само это уравнение и все последующие формулы выведены с использованием методов векторной алгебры. Более того, решения всех последующих задач будут проводиться с использованием векторов и их свойств. Переход от алгебраических уравнений к векторам и обратно будет проводиться автоматически, без оговорок.

Основной вектор, вводимый по уравнению прямой – это нормальный (или перпендикулярный) вектор прямой. В качестве его координат берут коэффициенты при x и y в уравнении $Ax + By + C = 0$, т.е. $\vec{n} \{ A ; B \}$. Вторым вектор – это направляющий (или параллельный) вектор прямой. Его координаты вводятся по формуле $\vec{a} \{ B ; -A \}$.

Вывод общего уравнения для конкретной прямой зависит от того, как положение прямой определено на плоскости.

■ **Уравнение прямой, проходящей через две заданных точки $M_1(x_1 ; y_1)$ и $M_2(x_2 ; y_2)$.**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (7)$$

Пример 6 Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2 ; -5)$ и $M_2(3 ; 2)$.

Решение. $L: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-(-5)}{2-(-5)} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{7}$. По свойству равенства

произведения крайних членов пропорции и произведения средних членов той же пропорции имеем: $7 \cdot (x - 2) = 1 \cdot (y + 5)$ или $7x - y - 19 = 0$.

■ **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0 ; y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\{a ; b\}$.**

$$L: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (8)$$

Пример 7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1 ; 2)$ перпендикулярно вектору $\{1 ; 3\}$.

Решение.
 $L: 1 \cdot (x - (-1)) + 3 \cdot (y - 2) = 0 \Rightarrow x + 1 + 3y - 6 = 0 \Rightarrow x + 3y - 5 = 0$.

■ Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0 ; y_0)$ параллельно данному вектору $\{m ; n\}$.

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (9)$$

Пример 8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1 ; 2)$ параллельно вектору $\{1 ; 3\}$.

Решение. $L: \frac{x - (-1)}{1} = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow$ по свойству членов пропорции $3x - y + 5 = 0$.

Пример 9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1 ; 2)$ параллельно вектору $\{0 ; 3\}$.

Решение.

$$L: \frac{x + 1}{0} = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow 3(x + 1) = 0(y - 2) \Rightarrow 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Получили уравнение прямой параллельной оси OY .

§ 4 Взаимное расположение прямых на плоскости .

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы их общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \Rightarrow \overline{N_1}\{A_1 ; B_1\};$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow \overline{N_2}\{A_2 ; B_2\}$$

■ Пучок прямых – это бесконечное множество прямых, которые проходят через точку пересечения двух данных непараллельных прямых. Аналитически пучок прямых задается уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где коэффициент λ – это любое действительное число.

Пример 10. Написать уравнение высоты треугольника, образованного прямыми $x + y - 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$, если известно, что высота опущена из точки пересечения первых двух прямых на третью.

Решение. Первые две прямые образуют пучок прямых, уравнение которого имеет вид : $x + y - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0$. Раскроем скобки и приведем подобные относительно x и y : $x(1 + \lambda) + y(1 - \lambda) - 1 + \lambda = 0$. Искомая высота является прямой этого пучка. Ей соответствует свой параметр λ , который и нужно найти. Выпишем нормальный вектор прямой пучка: $\overline{N} = \{1 + \lambda ; 1 - \lambda\}$.

Нормальный вектор третьей стороны треугольника имеет вид: $\bar{N}_3 = \{1 ; 2\}$. Поскольку высота и третья сторона перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы, а значит $\bar{N} \cdot \bar{N}_3 = 0 \Rightarrow (1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 3$. Подставим найденное значение параметра в общее уравнение прямой пучка: $x(1 + 3) + y(1 - 3) - 1 + 3 = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 2 = 0$ или после сокращения на 2 получим $2x + y + 1 = 0$.

■ **Признак параллельности прямых:**

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (10)$$

Используя эту пропорцию, можно доказать, что уравнения параллельных прямых можно преобразовать к такому виду, когда они отличаются только свободными членами.

$$\begin{aligned} L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 ; \\ L_2 : A_1 x + B_1 y + C_2 &= 0, \text{ где } C_1 \neq C_2 \end{aligned}$$

Пример 11. Через точку $(5 ; 2)$ провести прямую, параллельную прямой $3x - 2y + 5 = 0$.

Решение. Так как искомая прямая параллельна данной, то ее уравнение должно отличаться от уравнения данной прямой только свободным членом, т. е. $L_1 : 3x - 2y + C = 0$. Так как точка $(5 ; 2)$ по условию лежит на искомой прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой, т. е. $3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + C = 0 \Rightarrow C = -11$.

В итоге уравнение искомой прямой $L_1 : 3x - 2y - 11 = 0$.

■ **Признак перпендикулярности прямых:**

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \quad (11)$$

Последнее равенство позволяет ввести "механический" способ построения уравнения прямой перпендикулярной данной прямой. Для этого рассмотрим один частный способ построения вектора перпендикулярного данному.

Пусть есть вектор $\bar{N} = \{2 ; 3\}$. Построим новый вектор $\bar{N}_1$, поменяв местами координаты у данного вектора и изменив знак у одной из координат, например, у первой: $\bar{N}_1 = \{3 ; -2\}$. Очевидно, что $\bar{N}$ перпендикулярен $\bar{N}_1$, так как $\bar{N} \cdot \bar{N}_1 = 6 - 6 = 0$.

Таким образом, чтобы получить вектор, перпендикулярный данному, нужно у данного вектора координаты переставить местами и у одной из них поменять знак.

Правило построения уравнения прямой перпендикулярной данной практически повторяет правило построения вектора перпендикулярного данному, а именно: чтобы построить уравнение прямой перпендикулярной данной прямой, нужно у данной поменять местами коэффициенты при x и y и у одного из них изменить знак.

Пример 12. Дана прямая $L : 2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ перпендикулярно к данной прямой.

Решение. Уравнение искомой прямой с точностью до свободного члена имеет вид: $L_1 : 3x - 2y + C = 0$. Так как точка $M_0 \in L_1$, то ее координаты должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + C = 0$. Отсюда $C = -4$ и уравнение искомой прямой окончательно примет вид $L_1 : 3x - 2y - 4 = 0$.

■ **Угол между прямыми:**

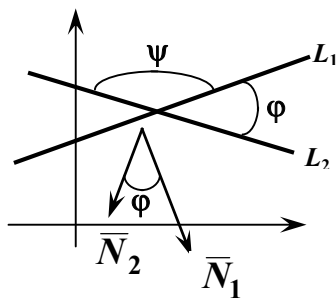


Рис. 7

$$\cos \varphi = \frac{\overline{N_1} \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| |\overline{N_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (12)$$

Заметим, что, если $\cos \varphi$ получился положительным, то найден косинус острого угла между прямыми; если же $\cos \varphi$ отрицателен, то он равен косинусу тупого угла ψ (Рис. 7).

■ **Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (13)$$

Пример 13. Даны вершины треугольника $A(-2; 1)$, $B(-1; 7)$ и $D(7; 0)$. Найти длину и уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BD (Рис. 8).

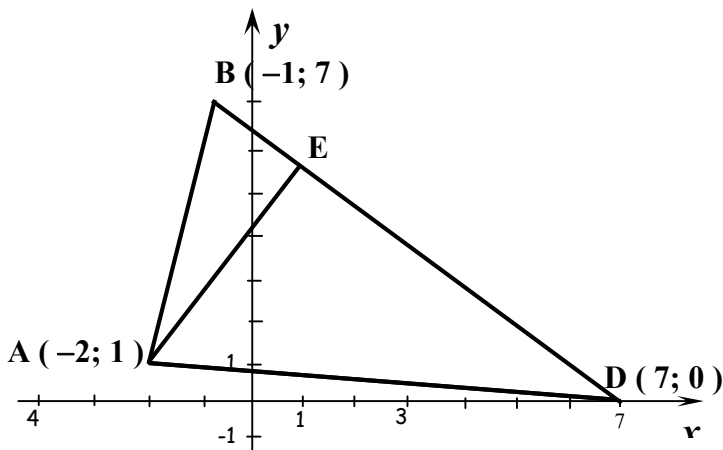


Рис. 8

Решение. Найдем уравнение стороны **BD**:

$$\begin{aligned} BD: \frac{x+1}{7+1} &= \frac{y-7}{0-7} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x+1}{8} &= \frac{y-7}{-7} \Rightarrow \\ \Rightarrow -7x-8y+49 &= 0 \end{aligned}$$

Если обилие минусов в полученном уравнении Вам не нравится, то можно умножить обе части этого уравнения на (-1) .

Новое уравнение $7x + 8y - 49 = 0$ задает ту же сторону **BD**.

Поскольку высота **AE** перпендикулярна стороне **BD**, то ее уравнение с точностью до свободного члена **C** можно получить из уравнения **BD** описанным выше способом, а именно, переставив коэффициенты при x и y и поменяв знак у одного из них: $8x - 7y + C = 0$. Для вычисления **C** подставим в это уравнение координаты точки **A**: $8 \cdot (-2) - 7 \cdot (1) + C = 0 \Rightarrow C = 23$. Тогда окончательно **AE**: $8x - 7y + 23 = 0$

Далее заметим, что длина высоты из вершины **A** в точности равна расстоянию от этой вершины до стороны **BD**. Поэтому

$$|AE| = d = \frac{|7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 - 49|}{\sqrt{7^2 + 8^2}} = \left| \frac{-55}{\sqrt{113}} \right| = \frac{55}{\sqrt{113}}.$$

■ Расстояние между параллельными прямыми.

Если прямые параллельны, то расстояние между ними считается равным расстоянию от любой точки на одной прямой до второй прямой. Но есть и другая формула. При ее выводе использован тот факт, что уравнения параллельных прямых можно привести к такому виду, когда они отличаются только свободными членами, т.е.

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$L_2: A_1x + B_1y + C_2 = 0, \text{ где } C_1 \neq C_2$$

Тогда

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad (14)$$

Пример 14. Две противоположные стороны квадрата лежат на прямых $x - 2y + 6 = 0$ и $2x - 4y - 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата.

Решение. Для вычисления площади этого квадрата достаточно найти расстояние между этими прямыми. Чтобы воспользоваться формулой (14),

нужно уравнения прямых преобразовать к такому виду, когда они будут отличаться только свободными членами. Этого можно добиться либо умножив на 2 первое уравнение, либо поделив на 2 второе. Первый вариант предпочтительнее только потому, что он не дает дробных коэффициентов. После преобразования получаем

$$L_1: 2x - 4y + 12 = 0 ;$$

$$L_2: 2x - 4y - 7 = 0 .$$

Тогда
$$d = \frac{|12 - (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{|19|}{\sqrt{20}} = \frac{19}{2\sqrt{5}} ,$$
 а значит площадь квадрата

$$S = \left(\frac{19}{2\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{361}{20} = 18.05$$

§ 5 Примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения

Основные методы составления уравнений прямых наглядно можно продемонстрировать на примере построения уравнений линейных элементов треугольника.

Пример 15. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-4; 1)$, $B(1; 5)$ и $C(3; -2)$ (Рис. 9)

Найти:

- 1) медиану CM ;
- 2) среднюю линию MN ;
- 3) высоту BD ;
- 4) биссектрису BE ;
- 5) центр описанной окружности.

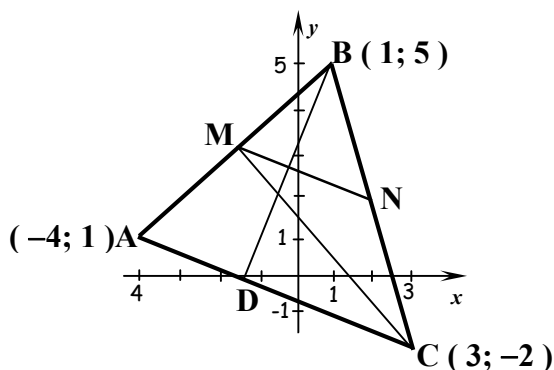


Рис. 9

Решение.

- 1) Найдем медиану CM . Вычислим координаты точки M — середины отрезка AB .

$$M\left(\frac{-4+1}{2}; \frac{1+5}{2}\right) \Rightarrow M(-1.5; 3). \text{ Уравнение } CM \text{ найдем по двум точкам:}$$

$$CM: \frac{x-3}{-1.5-3} = \frac{y+2}{3+2} \Rightarrow \frac{x-3}{-4.5} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow 5x + 4.5y - 6 = 0.$$

2) Найдем среднюю линию MN .

Способ 1. Вычислим координаты середины стороны BC – точки N .

$N\left(\frac{1+3}{2}; \frac{5-2}{2}\right) \Rightarrow N(2; 1.5)$. Уравнение MN найдем по двум точкам:

$$\begin{aligned} MN: \frac{x+1.5}{2+1.5} &= \frac{y-3}{1.5-3} \Rightarrow \frac{x+1.5}{3.5} = \frac{y-3}{-1.5} \Rightarrow \\ \Rightarrow -1.5x - 2.25 &= 3.5y - 10.5 \Rightarrow -1.5x - 3.5y + 8.25 = 0. \end{aligned}$$

Способ 2. Найдем MN по точке M и направляющему вектору, в качестве которого можно взять вектор $\overline{AC}$.

Вычислим: $\overline{AC} = \left\{ 3 - (-4); -2 - 1 \right\} = \left\{ 7; -3 \right\}$.

Тогда: $MN: \frac{x+1.5}{7} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x - 4.5 = 7y - 21 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -3x - 7y + 16.5 = 0 \Rightarrow 3x + 7y - 16.5 = 0$

Очевидно, что для MN получилось то же уравнение, что и при первом способе.

3) Уравнение высоты BD найдем по точке и перпендикулярному вектору, в качестве которого можно взять вектор $\overline{AC}$.

$$BD: 7(x-1) - 3(y-5) = 0 \Rightarrow 7x - 3y + 8 = 0.$$

4) Биссектрису BE можно найти разными способами (Рис. 10). Но, если числовые данные в задаче специально не подобраны, то все эти способы приводят к громоздким вычислениям. Наиболее легким для запоминания является способ, основанный на следующем факте:

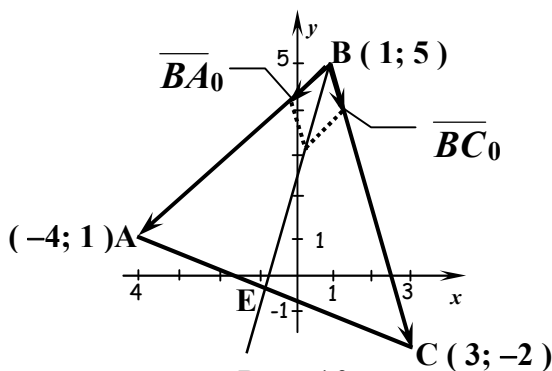


Рис. 10

вектор суммы векторов одинаковой длины идет в точности по биссектрисе угла, образованного этими векторами (свойство ромба).

Поскольку требуется найти биссектрису угла B , то возьмем два вектора, исходящих именно из этой вершины: $\overline{BA} = \{-5; -4\}$ и $\overline{BC} = \{2; -7\}$. Вычислим их длины:

$$|\overline{BA}| = \sqrt{41}; \quad |\overline{BC}| = \sqrt{53}.$$

Очевидно, что их длины не равны. А теперь от векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ перейдем к их ортам $\overline{BA_0}$

и $\overline{BC_0}$, векторам с тем же направлением, но одинаковой единичной длины.

$$\overline{BA_0} = \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} = \left\{ \frac{-5}{\sqrt{41}}; \frac{-4}{\sqrt{41}} \right\}; \quad \overline{BC_0} = \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{53}}; \frac{-7}{\sqrt{53}} \right\}.$$

Построим новый вектор

$$\begin{aligned}\overline{BA_0} + \overline{BC_0} &= \left\{ \frac{-5}{\sqrt{41}} + \frac{2}{\sqrt{53}} ; \frac{-4}{\sqrt{41}} + \frac{-7}{\sqrt{53}} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{-5\sqrt{53} + 2\sqrt{41}}{\sqrt{41}\sqrt{53}} ; \frac{-4\sqrt{53} - 7\sqrt{41}}{\sqrt{41}\sqrt{53}} \right\}.\end{aligned}$$

Этот вектор уже можно использовать в качестве направляющего для биссектрисы, но работать с ним нелегко. Вместо него можно взять другой вектор, попроще.

$$\bar{a} = \sqrt{41} \sqrt{53} \cdot (\overline{BA_0} + \overline{BC_0}) = \{-5\sqrt{53} + 2\sqrt{41} ; -4\sqrt{53} - 7\sqrt{41}\}$$

Корни, конечно, никуда не исчезли, но, по крайней мере, не стало дробей.

По формуле (9) имеем: $BE : \frac{x-1}{-5\sqrt{53} + 2\sqrt{41}} = \frac{y-5}{-4\sqrt{53} - 7\sqrt{41}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BE : (-4\sqrt{53} - 7\sqrt{41})x + (5\sqrt{53} - 2\sqrt{41})y + (17\sqrt{41} - 21\sqrt{53}) = 0$$

Если Вам не нравится отрицательный коэффициент при x , умножьте все уравнение на (-1) :

$$\Rightarrow BE : (4\sqrt{53} + 7\sqrt{41})x + (2\sqrt{41} - 5\sqrt{53})y + (21\sqrt{53} - 17\sqrt{41}) = 0$$

5) Найдем центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

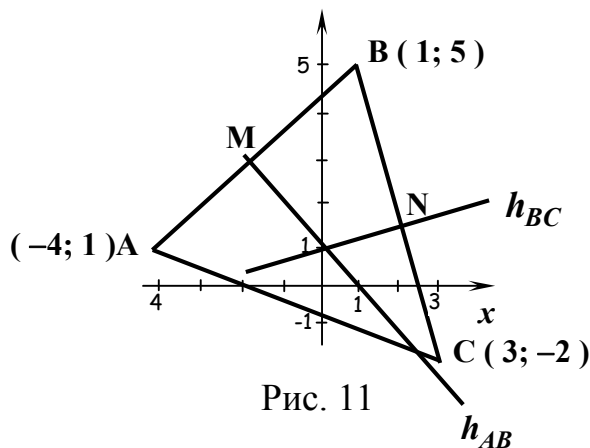


Рис. 11

Он, как известно, находится в точке пересечения любых двух серединных перпендикуляров треугольника ABC (Рис.11)..

Поскольку ранее были найдены координаты середин сторон AB и BC , найдем уравнения серединных перпендикуляров именно к этим сторонам: h_{AB} и h_{BC} .

Для h_{AB} имеем:

точка $M(-1.5 ; 3) \in h_{AB}$

$\overline{BA} = \{-5 ; -4\}$ перпендикулярен h_{AB}

$$\begin{aligned}h_{AB} : -5(x + 1.5) - 4(y - 3) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -5x - 4y + 4.5 &= 0 \Rightarrow 5x + 4y - 4.5 = 0\end{aligned}$$

Для h_{BC} имеем:

точка $N(2 ; 1.5) \in h_{BC}$

$\overline{BC} = \{2 ; -7\}$ перпендикулярен h_{BC}

$$\begin{aligned}h_{BC} : 2(x - 2) - 7(y - 1.5) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 7y + 6.5 &= 0\end{aligned}$$

Найдем точку пересечения полученных серединных перпендикуляров:

$$h_{AB} : 5x + 4y - 4.5 = 0 \text{ и } h_{BC} : 2x - 7y + 6.5 = 0$$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 4.5 = 0 \\ 2x - 7y + 6.5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 4.5; \\ 2x - 7y = -6.5 \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -43; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4.5 & 4 \\ -6.5 & -7 \end{vmatrix} = -5.5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4.5 \\ 2 & -6.5 \end{vmatrix} = -41.5.$$

$$x = \frac{-5.5}{-43} \approx 0.13; \quad y = \frac{-41.5}{-43} \approx 0.97$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 15 Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 3y + 6 = 0$,

$2x - 3y - 10 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $2x - y - 2 = 0$.

Составить уравнение второй диагонали. *Ответ:* $x + 2y - 1 = 0$.

Задача 16 Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$,

$2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$.

Составить уравнение второй диагонали. *Ответ:* $3x - y - 23 = 0$.

Задача 17 Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; -1)$. Найти уравнения двух других сторон. *Ответ:* $x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$.

Задача 18 Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A . *Ответ:* $x - 5 = 0$.

Задача 19 Найти точку M_1 , симметричную точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.

Ответ: $M_1(10; -5)$.

Задача 20 Точки $A(1; 2)$ и $C(3; 6)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата.

Ответ: $(0; 5)$ и $(4; 3)$

Задача 21 Найти прямые, принадлежащие пучку $2x + 3y + 6 + \lambda(x - 5y - 6) = 0$ и перпендикулярные основным прямым пучка.

Ответ: $3x - 2y = 0$, $5x + y + 6 = 0$.

Задача 22 Даны стороны треугольника: $(AB)x - y = 0$; $(BC)x + y - 2 = 0$ и $(AC)y = 0$. Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B , и высоты, проходящей через вершину A . *Ответ:* $x = 1$, $y = x$.

Задача 23 Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого ле-

жат на осях координат.

Ответ: $3x - 4y - 9 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$ или $4x + 3y + 13 = 0$.

Задача 24 Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-1; 2)$, $B(2; 1)$, $C(3; 3)$ и $D(1; 6)$ – трапеция. Найти точку пересечения средней линии трапеции и высоты, опущенной из вершины C на сторону AD .

Ответ: $(1.6; 3.7)$

Задача 25 Вершины четырехугольника: $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$, $C(2; 5)$, $D(-1; 4)$. Доказать, что этот четырехугольник – ромб. Найти точку пересечения перпендикуляра из вершины B на сторону AD с прямой, проходящей через вершину и середину BC .

Ответ: $(-1/11; 26/11) \approx (-0.1; 2.4)$

Задача 26 Даны три из четырёх вершин трапеции $ABCD$:

$A(-3; -2)$; $B(4; -1)$; $C(1; 3)$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

Ответ: $(-23/33; 91/33) \approx (-0.7; 2.8)$

ГЛАВА 2. Плоскость

§ 1 Вступление

В аналитической геометрии плоскость P – это геометрическое множество точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости;

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{– уравнение плоскости в отрезках,}$$

где a – абсцисса точки пересечения плоскости P с осью OX ; b – ордината точки пересечения P с осью OY , а c – аппликата точки пересечения P с осью OZ .

§ 2 Вывод уравнения плоскости при разных способах ее задания.

■ Уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

$$P: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Чтобы получить общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, нужно символично вычислить этот определитель, например, разложив его по первой строке.

Пример 16. Даны вершины тетраэдра: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(-1; 0; 5)$. Найти уравнение грани ABC .

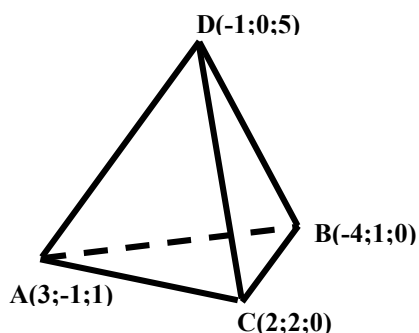


Рис. 12

Решение. Замечу, что эту задачу можно решать «вслепую», без чертежа. Но для лучшего понимания методов решения, чертеж (хотя бы схематический) лучше все-таки нарисовать.

Обозначим $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости, в которой лежит основание ABC .

$$P_{\Delta ABC} : \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -4-3 & 1+1 & 0-1 \\ 2-3 & 2+1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -7 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3) \cdot 1 - (y+1) \cdot 6 + (z-1) \cdot (-19) = 0.$$

Окончательно $P_{\Delta ABC} : x - 6y - 19z + 10 = 0$.

■ **Уравнение плоскости, проходящей через данную точку**

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\{a; b; c\}$

$$P : a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0 \quad (16)$$

Пример 17. Даны вершины тетраэдра: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(-1; 0; 5)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через вершину C перпендикулярно ребру AD .

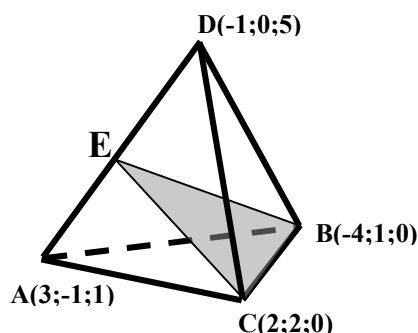


Рис. 13

Решение. Искомая плоскость $P_{\Delta CEB}$ изображена на Рис 13. Так как по условию плоскость $P_{\Delta CEB}$ перпендикулярна боковому ребру AD , то вектор $\overrightarrow{AD} = \{-4; 1; 4\}$ перпендикулярен плоскости треугольника CEB . Точка $C(2; 2; 0) \in P_{\Delta CEB}$. Тогда $P_{\Delta CEB} : -4 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow P_{\Delta CEB} : -4x + y + 4z + 6 = 0$.

Пример 18. Известно, что точки: $A(3; 6; 2)$ и $B(-5; -6; 6)$ симметричны относительно некоторой плоскости P . Найти уравнение этой плоскости.

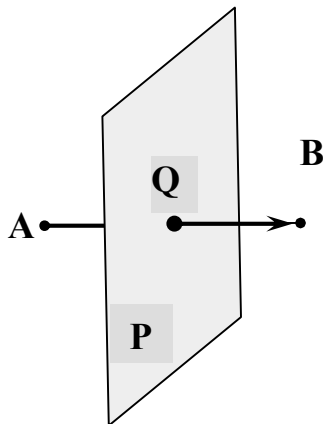


Рис. 14

Решение. Искомая плоскость изображена на Рис.14. Поскольку по условию точки A и B симметричны относительно плоскости P , то они лежат на перпендикуляре к этой плоскости, проходящем через A и B . Так как A и B равноудалены от плоскости P , то эта плоскость проходит через середину отрезка AB – точку Q .

Нарисуем вектор $\overline{AB}$ и введем его аналитически $\overline{AB} = \{-8; -12; 4\}$. Вычислим координаты точки Q : $Q(-1; 0; 4)$. По формуле (16) построим уравнение искомой плоскости

$$\begin{aligned} P: -8 * (x + 1) - 12 * (y - 0) + 4 * (z - 4) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -8x - 12y + 4z - 24 &= 0 / \text{поделим на } (-4) / \Rightarrow \\ \Rightarrow P: 2x + 3y - z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

■ **Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно двум непараллельным векторам $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.**

$$P: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

Замечание. Решение многих задач на составление уравнения плоскости на практике сводится к поиску трех компланарных векторов. Их смешанное произведение, как известно, равно нулю. В координатах смешанное произведение вычисляется с помощью определителя 3-го порядка, строки которого и есть координаты этих трех векторов. Именно в этом и заключается смысл формул (15) и (17).

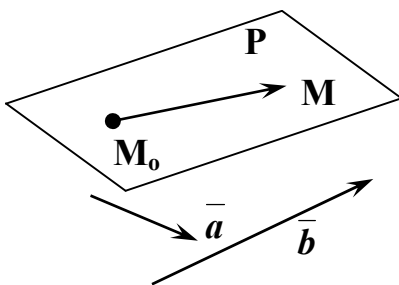


Рис. 15

Пример 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

Решение. Прежде всего заметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, так как их координаты не пропорциональны $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$ (Рис.15). Далее, обозначим

$M(x; y; z)$ – произвольная точка искомой плоскости. Нарисуем вектор $\overline{M_0M}$ и

введем его аналитически $\overline{M_0M} = \{x-3; y-4; z+5\}$. По условию искомая плоскость параллельна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ или, что то же самое, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны искомой плоскости. Это в свою очередь означает, что параллельным переносом векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно переместить в плоскость вектора $\overline{M_0M}$. Следовательно все три вектора $\overline{M_0M}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны и их смешанное произведение $(\overline{M_0M} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} = 0$, что в координатах дает уравнение

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-3) - 4(y-4) - 7(z+5) = 0 \Rightarrow$$

$$-x - 4y - 7z - 16 = 0 \text{ или } x + 4y + 7z + 16 = 0.$$

■ **Уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ параллельно заданному вектору $\bar{a} = \{m; n; p\}$**

$$P: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

Пример 20. Известно, что пространственная прямая L , проходящая через точку $M_0(5; 8; 1)$, пересекает плоскость $P: 2x + 3y - z - 5 = 0$ в точке $A(2; 0; -1)$. Найти уравнение плоскости P_1 , проектирующей прямую L на данную плоскость P (Рис. 16).

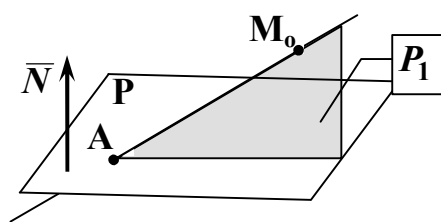


Рис. 16

Решение. Две точки, через которые проходит искомая плоскость P_1 , уже

имеются – это точки M_0 и A . По этим точкам можно ввести вектор $\overline{M_0A} = \{-3; -8; -2\}$, заведомо лежащий в искомой плоскости P_1 . Далее, как всегда, введем точку $M(x; y; z)$ – произвольную точку искомой плоскости. По ней и по точке, например, A введем еще один вектор, также лежащий в искомой плоскости, а именно

$\overline{AM} = \{x-2; y-0; z+1\}$. Осталось найти вектор, которому плоскость P_1 параллельна или, что то же самое, который параллелен этой плоскости. Таковым является вектор $\bar{N} = \{2; 3; -1\}$ – нормальный вектор данной плоскости P . Введенные три вектора компланарны, а значит их смешанное произведение $(\overline{AM} \times \overline{M_0A}) \cdot \bar{N} = 0$, что в координатах дает уравнение:

$$P_1: \begin{vmatrix} x-5 & y-8 & z-1 \\ -3 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-5) \cdot 14 - (y-8) \cdot 7 + (z-1) \cdot 7 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_1: 14x - 7y + 7z - 21 = 0$$

§ 3 Взаимное расположение плоскостей.

Взаимное расположение плоскостей будем исследовать через взаимное расположение их нормальных векторов.

Пусть плоскости P_1 и P_2 заданы своими общими уравнениями, из которых сразу определяем нормальные векторы этих плоскостей:

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \bar{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\};$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \bar{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}.$$

■ **Пучок плоскостей** – это бесконечное множество плоскостей, которые проходят через прямую пересечения двух данных непараллельных плоскостей. Аналитически пучок плоскостей задается уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где коэффициент λ – это любое действительное число.

Пример 21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 1; -3)$ и прямую $L: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0; \\ x + 2y + 3 = 0. \end{cases}$

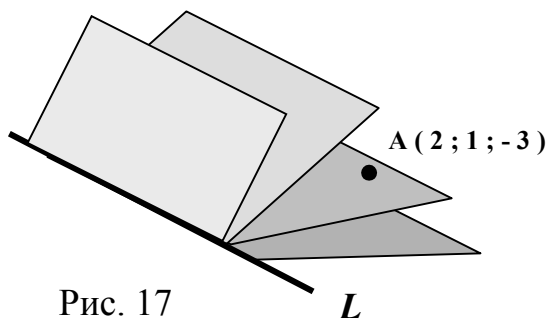


Рис. 17

Решение. Идея решения – найти искомую плоскость как отдельную плоскость пучка плоскостей (Рис. 17). Для этого от общих уравнений прямой L перейдем к уравнению пучка плоскостей, проходящих через L :

$$L: x - y - z + \lambda(x + 2y + 3) = 0.$$

Приведем подобные относительно x , y и z :

$$(1 + \lambda)x + (-1 + 2\lambda)y - z + (-1 + 3\lambda) = 0.$$

Уравнение искомой плоскости получается из этого уравнения при каком-то конкретном значении коэффициента λ . Найдем это значение. Для этого координаты точки A подставим в уравнение пучка:

$$2 - 1 + 3 + \lambda(2 + 2 + 3) = 0 \Rightarrow 7\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{7}.$$

Найденное значение λ подставим в общее уравнение пучка:

$$P: \left(1 - \frac{4}{7}\right)x + \left(-1 - \frac{8}{7}\right)y - z + \left(-1 - \frac{12}{7}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{7}x - \frac{15}{7}y - z - \frac{19}{7} = 0.$$

Для упрощения умножим все уравнение на 7 :

$$P: 3x - 15y - 7z - 19 = 0.$$

■ **Признак параллельности плоскостей:**

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (19)$$

Так же как и у плоских прямых уравнения параллельных плоскостей могут быть приведены к такому виду, когда они отличаются только свободными членами, т. е.

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad ;$$

$$P_2: A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0 \quad , \text{ где } D_1 \neq D_2.$$

■ **Расстояние между параллельными плоскостями:**

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad (20)$$

■ **Признак перпендикулярности плоскостей:**

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \quad (21)$$

По этой формуле, например, можно проверить правильно ли мы нашли проектирующую плоскость в предыдущем примере.

Пример 22. Проверить перпендикулярна ли плоскость

$$P: 2x + 3y - z - 5 = 0 \text{ плоскости } P_1: 14x - 7y + 7z - 21 = 0.$$

Решение. По уравнениям плоскостей строим их нормальные векторы: $\overline{N} = \{2; 3; -1\}$ и $\overline{N_1} = \{14; -7; 7\}$. Вычислим их скалярное произведение: $\overline{N} \cdot \overline{N_1} = 2 * 14 + 3 * (-7) + (-1) * 7 = 0$. Действительно, проектирующая плоскость в примере 20 была найдена верно.

■ **Угол между плоскостями:**

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}|}{|\overline{N_1}| |\overline{N_2}|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (22)$$

■ Расстояние от точки $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (23)$$

Пример 23. Найти расстояние от точки $A(2 ; 2 ; 3)$ до плоскости $P: 8x - 4y + z - 38 = 0$.

Решение.

Для решения достаточно подставить числовые данные задачи в формулу (23).

$$d = \frac{|8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 38|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3.$$

ГЛАВА 3. Прямая в пространстве

§ 1 Вступление

В аналитической геометрии пространственная прямая L – это геометрическое место точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют одному из трех видов уравнений.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \text{ – канонические уравнения пространственной прямой;}$$

$$L : x = x_0 + mt ; y = y_0 + nt ; z = z_0 + pt \text{ – параметрические уравнения пространственной прямой;}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 , \end{array} \right. \text{ – общие уравнения пространственной прямой.}$$

$$\text{где } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

§ 2 Вывод уравнения пространственной прямой при разных способах ее задания.

■ **Канонические уравнения пространственной прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{a} = \{m ; n ; p\}$.**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (24)$$

Пример 24. Даны вершины тетраэдра: $A(3 ; -1 ; 1)$, $B(-4 ; 1 ; 0)$, $C(2 ; 2 ; 0)$ и $D(-1 ; 0 ; 5)$. Найти канонические уравнения высоты тетраэдра, проведенной из вершины D к основанию ABC .

Решение.

В примере 16 уравнение плоскости основания ABC было выведено:

$$P_{\Delta ABC} : x - 6y - 19z + 10 = 0.$$

По этому уравнению сразу находим нормальный вектор плоскости основания:

$$\vec{N} = \{1 ; -6 ; -19\}.$$

Высота DO и вектор $\vec{N}$ перпендикулярны одной и той же плоскости – плоскости основания, а значит они параллельны, и поэтому вектор $\vec{N}$ можно взять в качестве направляющего для высоты DO .

Точка, заведомо лежащая на DO , есть – это точка $D(-1 ; 0 ; 5)$. Тогда по формуле (24) находим уравнение DO .

$$DO : \frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{-6} = \frac{z-5}{-19} \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z-5}{-19}$$

■ **Параметрические уравнения пространственной прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{a} = \{m ; n ; p\}$.**

$$L : x = x_0 + mt ; y = y_0 + nt ; z = z_0 + pt \quad (25)$$

Параметрические уравнения пространственной прямой мы будем выводиться из канонических уравнений этой прямой. Для этого пропорцию в канонических уравнениях нужно приравнять к параметру t , затем «разорвать» эту пропорцию на три уравнения и разрешить их относительно x , y и z .

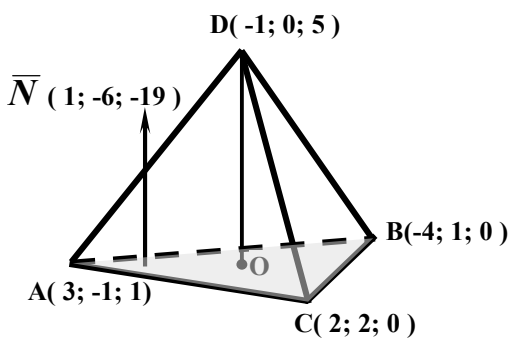


Рис. 18

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t; \\ \frac{y-y_0}{n} = t; \\ \frac{z-z_0}{p} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Пример 25. Даны вершины тетраэдра: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(-1; 0; 5)$. Найти параметрические уравнения высоты тетраэдра, проведенной из вершины D к основанию ABC .

Решение. В примере 24 были выведены канонические уравнения высоты DO . Выполним над ними действия, указанные выше.

$$DO: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z-5}{-19} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{1} = t; \\ \frac{y}{-6} = t; \\ \frac{z-5}{-19} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t; \\ y = -6t; \\ z = 5 - 19t. \end{cases} \quad \text{— параметрические уравне-}$$

ния высоты DO .

■ **Канонические уравнения пространственной прямой, проходящей через две заданных точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (26)$$

Замечания

1. Для получения канонических уравнений прямой совершенно безразлично какую точку считать первой, а какую второй.
2. Если в знаменателях пропорции получится много минусов, то все знаменатели можно умножить на (-1) . Новая пропорция задает ту же самую прямую.
3. Если знаменатели содержат дробные числа, то для упрощения вычислений их можно умножить на одно и то же число, чтобы знаменатели стали целыми.

Пример 26. Даны вершины тетраэдра: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(-1; 0; 5)$. Найти канонические уравнения бокового ребра AD .

Решение. Будем для определенности считать точку A первой, а точку D — второй. Тогда

$$AD: \frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+1}{0+1} = \frac{z-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

Можно было в числителях пропорции вычитать координаты точки D . Тогда уравнение AD имело бы вид:

$$AD: \frac{x+1}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

■ **Общие уравнения пространственной прямой.**

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ \text{где } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{cases} \quad (27)$$

Поскольку большинство задач на пространственную прямую используют канонические уравнения, то рассмотрим переход от общих уравнений пространственной прямой к каноническим.

Пример 27. Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0; \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Способ 1. Для канонических уравнений нужно иметь одну точку (любую), лежащую на этой прямой, и какой-нибудь вектор ненулевой длины, параллельный этой прямой. В качестве искомой точки можно взять любую точку, координаты которой совпадают с каким-либо частным решением системы уравнений, задающих прямую. Поскольку в ней два уравнения и три неизвестных, то одна переменная является свободной. Пусть это будет переменная z и пусть для простоты вычислений $z = 0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 3x + 2y = 4. \end{cases} \Rightarrow x = 2; y = -1. \text{ Искомая точка } M_0(2; -1; 0).$$

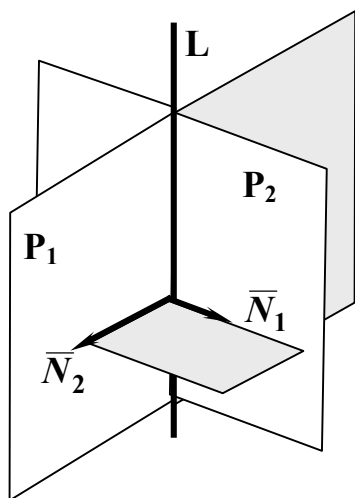


Рис. 19

Теперь найдем направляющий вектор. Нормальные векторы данных плоскостей при совмещении их начал в точке на прямой L образуют плоскость, перпендикулярную этой прямой. Можно сказать и иначе: прямая L перпендикулярна плоскости нормальных векторов. Наряду с прямой L есть вектор, перпендикулярный этой же плоскости. Это векторное произведение нормальных векторов заданных плоскостей, т.е. $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Следовательно, вектор $\vec{a}$ параллелен прямой L , а значит его можно взять в качестве направляющего для L . Найдем его координаты.

$$\bar{a} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой L примут вид:

$L : \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$. Можно для упрощения дальнейших вычислений уменьшить знаменатели в пропорции вдвое. Новое уравнение $L : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$ задает ту же самую прямую L .

Способ 2. Как известно, канонические уравнения прямой L можно построить, если известны координаты двух точек, заведомо лежащих на этой прямой. Одна уже найдена – это точка $M_0(2; -1; 0)$. Вторую найдем тем же способом. Для этого в системе $\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$ положим теперь, например, $x=0$. Система

примет вид $\begin{cases} -2y+3z-4=0; \\ 2y-5z-4=0. \end{cases}$ Сложим (I) и (II): $-2z=8 \Rightarrow z=-4; y=-8$. Тогда $M_2(0; -8; -4)$. Подставим координаты найденных точек в формулу (26):

$L : \frac{x-2}{0-2} = \frac{y+1}{-8+1} = \frac{z}{-4} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z}{-4}$. Умножим все знаменатели на

(-1) : $L : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. Как и следовало ожидать, получилось то же самое уравнение, что и при первом способе.

§ 3 Взаимное расположение пространственных прямых.

Взаимное расположение пространственных прямых будем исследовать по коэффициентам их канонических уравнений.

Пусть прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1};$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

■ **Признак параллельности пространственных прямых:**

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (28)$$

Для практического решения задач очень полезен тот факт, что уравнения параллельных пространственных прямых могут быть преобразованы к такому виду, когда они отличаются только координатами точек, вычитаемых в числителе, т.е.

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1};$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{m_1} = \frac{y-y_2}{n_1} = \frac{z-z_2}{p_1}.$$

Чтобы убедиться, что это уравнения параллельных прямых, а не два уравнения одной и той же прямой, нужно координаты точки $M_2(x_2; y_2; z_2)$ подставить в уравнение L_1 . Если в результате этой подстановки символьная пропорция не превратится в верные числовые равенства, то точка M_2 на принадлежит прямой L_1 и мы имеем дело с уравнениями двух параллельных прямых, а не с одной.

Пример 28. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$. Найти уравнения всех сторон параллелограмма и уравнение плоскости, в которой он лежит (Рис. 20).

Решение. Канонические уравнения сторон AB и BC найдем по формуле (26).

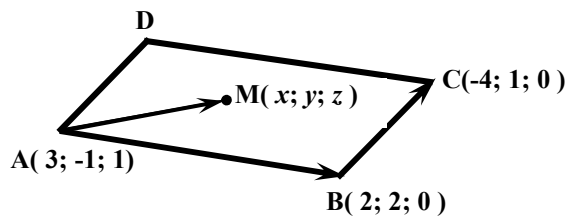


Рис. 20

$$AB: \frac{x-3}{2-3} = \frac{y+1}{2+1} = \frac{z-1}{0-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$BC: \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-0}{0-0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-6} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{0}$$

Так как $DC \parallel AB$ и DC проходит через точку C , то уравнения DC можно получить из уравнений AB , заменив в числителях координаты точки A на координаты точки C :

$$DC: \frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

Аналогично выводится уравнение AD из уравнения BC :

$$AD: \frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}.$$

Для вывода уравнения плоскости параллелограмма нужно найти три непараллельных вектора, лежащих в этой плоскости. Два вектора уже есть – это векторы $\overline{AB} = \{-1; 3; -1\}$ и $\overline{BC} = \{-6; -1; 0\}$. Обозначим $M(x; y; z)$ – произвольная точка искомой плоскости. Введем третий вектор

$$\overline{AM} = \{x-3; y+1; z-1\}.$$

Смешанное произведение этих векторов запишем в координатах и приравняем его к нулю.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3) + 6(y+1) + 19(z-1) = -x + 6y + 19z - 10 = 0$$

■ Угол между скрещивающимися пространственными прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (29)$$

■ Признак перпендикулярности скрещивающихся пространственных прямых:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (30)$$

Пример 29. Доказать перпендикулярность прямых

$$L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad L_2 : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0; \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из канонических уравнений L_1 имеем: $\bar{a}_1 = \{1; -2; 3\}$.

Для прямой L_2 нужно перейти от общих уравнений к каноническим. Во-первых, найдем точку M_0 , заведомо лежащую на L_2 . Для этого положим, что $z = 0$. Затем решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = -1; \\ 2x + 3y = -3. \end{cases} \Rightarrow (\text{I}) \cdot 3 - (\text{II}) \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow x = 0; y = -1.$$

Окончательно получаем $M_0 = \{0; -1; 0\}$.

Теперь найдем направляющий вектор L_2 . Для этого вычислим

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 7\bar{i} + 14\bar{j} + 7\bar{k} = \{7; 14; 7\}$$

«Укоротим» этот вектор в 7 раз и новый «укороченный» вектор

$$\bar{a}_2 = \frac{\bar{N}_1 \times \bar{N}_2}{7} = \{1; 2; 1\} \text{ возьмем в качестве направляющего для } L_2.$$

Окончательно $L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$. Вычислим скалярное произведение

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0. \text{ Действительно, } L_1 \text{ и } L_2 \text{ перпендикулярны.}$$

ГЛАВА 4. Прямая и плоскость в пространстве

§ 1 Вступление

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве будем исследовать по каноническим уравнениям прямой и общему уравнению плоскости.

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Из уравнения прямой сразу получаем направляющий вектор этой прямой $\vec{a} = \{m; n; p\}$, а из уравнения плоскости – ее нормальный вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

§ 2 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

■ Признак параллельности.

$$L \parallel P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{N} \Leftrightarrow m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C = 0$$

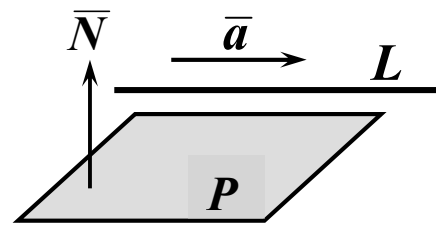


Рис. 21

■ Признак перпендикулярности.

$$L \perp P \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{N} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

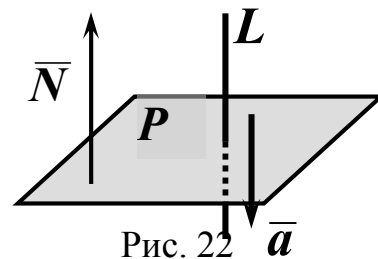


Рис. 22

■ Угол между прямой и плоскостью.

Замечание. По определению угол между прямой L и плоскостью P – это угол φ между этой прямой L и ее проекцией L' на плоскость P . Но для вычислений это определение неудобно. Поэтому вместо угла φ ищут угол ψ – угол между прямой L (а точнее, ее направляющим вектором) и нормальным вектором плоскости P . Поскольку $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, то $|\cos \psi| = \sin \varphi$.

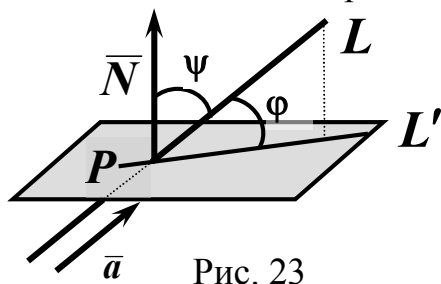


Рис. 23

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{N}|} \right| = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (31)$$

Пример 30. Даны вершины тетраэдра: $A(3; -1; 1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(-1; 0; 5)$. Найти угол, образованный ребром AD с плоскостью основания ABC .

Решение. Канонические уравнения бокового ребра AD и уравнение плоскости основания ABC были выведены ранее в примерах 16 и 26:

$$AD: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}; \quad P_{\Delta ABC}: x-6y-19z+10=0.$$

Из этих уравнений сразу находим $\vec{a} = \{-4; 1; 4\}$ – направляющий вектор ребра AD и $\vec{N} = \{1; -6; -19\}$ – нормальный вектор плоскости основания ABC .

Осталось координаты этих векторов подставить в формулу (31):

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \left| \frac{(-4) \cdot 1 + 1 \cdot (-6) + 4 \cdot (-19)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-19)^2}} \right| = \left| \frac{-86}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{398}} \right| = \frac{86}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{398}} \approx 0.75$$

Следовательно $\varphi = \arcsin 0.75 \approx 49^\circ$.

■ Точка пересечения прямой и плоскости.

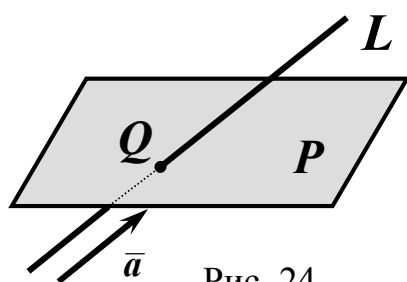


Рис. 24

Схема решения такова:

- 1) от канонических уравнений прямой L переходим к ее параметрическим уравнениям;
- 2) полученные параметрические формулы подставляем в уравнение плоскости; находим параметр t ;
- 3) найденное значение параметра t подставляем в параметрические формулы прямой L ;
- 4) найденные значения x , y , z и являются координатами точки пересечения прямой L с плоскостью P .

Пример 31. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \quad \text{и} \quad P: 2x+3y+z-1=0$$

Решение. Обозначим Q точку пересечения L с P . Перейдем к параметрическим уравнениям прямой L :

$$x = 1 + t; \quad y = -1 - 2t; \quad z = 6t$$

Выражения для x , y , z через t подставим в уравнение плоскости P и найдем параметр t : $2(1+t) + 3(-1-2t) + 6t - 1 = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Подставим $t = 1$ в выражения x , y , z через t и найдем координаты точки Q :

$$x = 2; \quad y = -3; \quad z = 6.$$

Окончательный ответ: $Q(2; -3; 6)$.

■ Проекция точки на прямую в пространстве.

Прежде всего подчеркнем, что в пространстве точка проектируется на прямую с помощью перпендикулярной плоскости (Рис. 25), а не с помощью перпендикулярной прямой, как на плоскости.

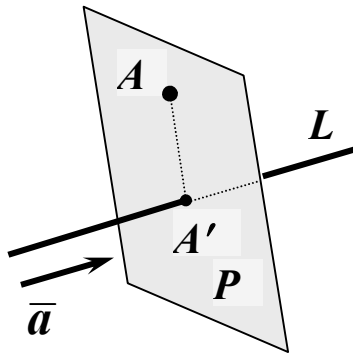


Рис. 25

Схема решения такова:

- 1) строим плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой L (направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L берется в качестве нормального к плоскости P);
- 2) от канонических уравнений L перейдем к параметрическим уравнениям ;
- 3) параметрические уравнения L подставляем в уравнение плоскости P и находим то значение параметра t , которое соответствует точке пересечения L с P . Эта точка A' и является проекцией точки A на прямую L .

Пример 32. Найти проекцию точки $A(7 ; 9 ; 7)$ на прямую

$$L : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} .$$

Решение. Найдем уравнение проектирующей плоскости:

$$P : 4(x-7) + 3(y-9) + 2(z-7) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2z - 69 = 0$$

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой L :

$$x = 2 + 4t ; y = 1 + 3t ; z = 2t$$

Выражения для x , y , z через t подставим в уравнение проектирующей плоскости P и найдем параметр t :

$$4(2 + 4t) + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t - 69 = 0 \Rightarrow 29t - 58 = 0 \Rightarrow t = 2 .$$

Найдем точку пересечения L с P , подставив $t = 2$ в параметрические уравнения L :

$$x = 2 + 4 \cdot 2 = 10 ; y = 1 + 3 \cdot 2 = 7 ; z = 4 .$$

Окончательный ответ: $A'(10 ; 7 ; 4)$.

■ Проекция точки на плоскость в пространстве.

Схема решения такова:

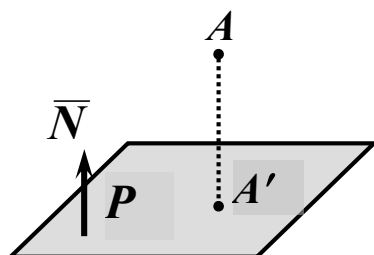


Рис. 26

- 1) опускаем перпендикуляр из точки A на плоскость P , т.е. строим его канонические уравнения;
- 2) от канонических уравнений этого перпендикуляра переходим к параметрическим уравнениям;

- 3) полученные параметрические формулы подставляем в уравнение плоскости; находим параметр t ;
- 4) найденное значение параметра t подставляем в параметрические формулы перпендикуляра; найденные значения x , y , z и являются координатами проекции A' точки A на плоскость P .

Пример 33. Найти проекцию точки $D(-1; 1; 2)$ на плоскость, проходящую через точки: $A(2; 0; -5)$, $B(4; 1; -3)$, $C(2; 1; -4)$.

Решение. Найдем уравнение плоскости треугольника ABC (Рис. 27):

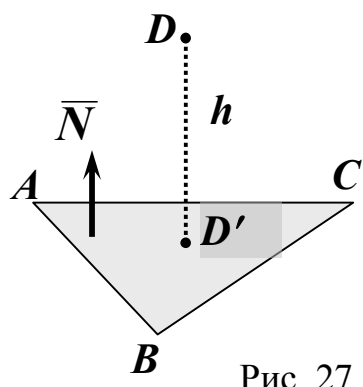


Рис. 27

$$P_{ABC} : \begin{vmatrix} x-2 & y & z+5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2) - 2y + 2(z+5) = -x - 2y + 2z + 12 = 0$$

Для удобства дальнейших вычислений умножим все уравнение на (-1) , тогда

$$P_{ABC} : x + 2y - 2z - 12 = 0$$

Из точки D опустим перпендикуляр h на плоскость треугольника ABC и найдем канонические уравнения

этого перпендикуляра:

$$h : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

От этих канонических уравнений h перейдем к параметрическим уравнениям:

$$x = -1 + t; \quad y = 1 + 2t; \quad z = 2 - 2t.$$

Полученные выражения x , y , z через t подставим в уравнение плоскости треугольника ABC и найдем значение параметра:

$$(-1 + t) + 2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) - 12 = 0 \Rightarrow 9t = 15 \Rightarrow t = \frac{5}{3}.$$

Подставим найденное значение $t = \frac{5}{3}$ в параметрические формулы h :

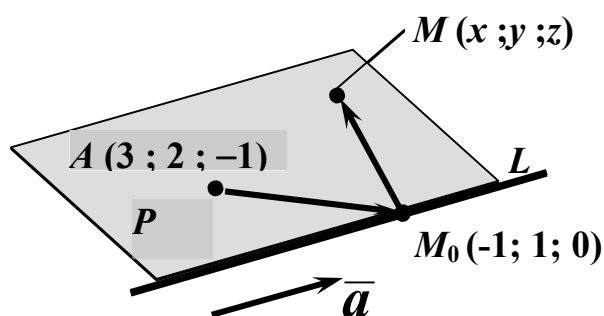
$$x = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}; \quad y = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}; \quad z = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}. \quad \text{В итоге } D' \left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{4}{3} \right).$$

Пример 34. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1} \text{ и точку } A(3; 2; -1).$$

Решение.

Способ 1. Идея решения – найти три компланарных вектора (Рис. 28).



Из канонических уравнений прямой L имеем данные: $\bar{a} = \{2; 3; -1\}$ – направляющий вектор прямой L ; $M_0(-1; 1; 0)$ – точка, лежащая на прямой L . Так как $\bar{a} \parallel L$, то $\bar{a} \parallel P$.

Точки A и M_0 лежат в искомой плоскости. Введем вектор $\overline{AM_0} = \{-4; -1; 1\}$. Он также лежит в искомой плоскости. Традиционно обозначим $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости P . Введем вектор $\overline{AM} = \{x-3; y-2; z+1\}$. Заметим, что вместо вектора $\overline{AM}$ можно было ввести вектор $\overline{M_0M} = \{x+1; y-1; z\}$, который также принадлежит плоскости P .

Таким образом, получили три компланарных вектора $\overline{AM}$, $\bar{a}$ и $\overline{AM_0}$. Их смешанное произведение равно нулю, что в координатах дает уравнение:

$$(\overline{AM} \times \bar{a}) \cdot \overline{AM_0} = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (x-3) - (y-2) \cdot (-2) + (z+1) \cdot 10 = \\ = 2x + 2y + 10z = 0 \text{ или после деления на } 2 \quad x + y + 5z = 0.$$

Способ 2. Идея решения – найти три точки, заведомо лежащие в искомой плоскости. (Рис. 29). Две точки уже есть – это $A(3; 2; -1)$ и $M_0(-1; 1; 0)$.

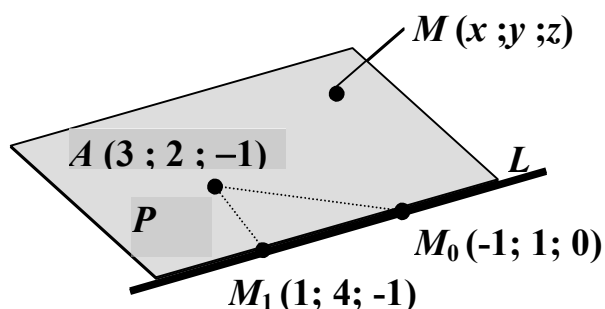


Рис. 29

Найдем еще одну точку на прямой L .

Для этого пропорцию в канонических уравнениях L приравняем к t :

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1} = t. \text{ Затем положим}$$

$t=1$, разобьем пропорцию на три равенства и найдем: $x_1=1$, $y_1=4$ и $z_1=-1$.

Следовательно, $M_1(1; 4; -1)$. Тогда

уравнение плоскости P получится по формуле (15) из уравнения:

$$P: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -1-3 & 1-2 & 0+1 \\ 1-3 & 4-2 & -1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -0 \end{vmatrix} = \\ = (x-3) \cdot (-2) - (y-2) \cdot 2 + (z+1) \cdot (-10) = -2x - 2y - 10z = 0$$

Для упрощения поделим все уравнение на (-2) :

$$P: x + y + 5z = 0.$$

Способ 3. Идея решения – найти искомую плоскость как плоскость пучка плоскостей, проходящих через прямую L .

“Разорвем” пропорцию $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$ на два уравнения: $L: \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1} \end{cases}$

Тогда $L: \begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 3z + y - 1 = 0 \end{cases}$ – общие уравнения L . Построим уравнение пучка:

$3x - 2y + 5 + \lambda(3z + y - 1) = 0$. Координаты точки $A(3; 2; -1)$ должны удовлетворять этому уравнению, т.е.

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 5 + \lambda(3 \cdot (-1) + 2 - 1) = 0 \Rightarrow -2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 5.$$

Подставим $\lambda = 5$ в уравнение пучка

$$3x - 2y + 5 + 5(3z + y - 1) = 0 \Rightarrow 3x + 3y + 15z = 0.$$

Окончательно после деления на 3 получаем: $P: x + y + 5z = 0$.

§3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 27 Вычислить расстояние от точки $N(2; -1; 5)$ до плоскости, проходящей через три точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(0; 2; 1)$; $C(2; 1; -1)$.

Ответ: $P: 2x + 2y + z - 5 = 0$; $d = \frac{2}{3}$.

Задача 28 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; -1)$ и

прямую $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Ответ: $P: -x + y + z = 0$.

Задача 29 Найти проекцию точки $B(-3; -1; 6)$ на прямую $L: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$.

Ответ: $B'(-1; 2; 2)$.

Задача 30 Прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$ пересекаются в точке $A(1; 2; 3)$. Найти плоскость, в которой эти прямые лежат.

Ответ: $B(3; 1; 4) \in L_1$ при $t=1$; $P: 2x + 3y - z - 5 = 0$.

Задача 31 Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку

$A(0; 0; 4)$ и точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{2}$ с плоскостью $5x - 3y + 15z + 15 = 0$.

Ответ: $t = -2$; $B(3; 5; -1)$; $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{-5}$.

Задача 32 Доказать, что точки $A(-1; -1; 1)$; $B(0; -2; 0)$; $C(-2; 3; 8)$; $D(-3; 4; 9)$ лежат в одной плоскости. Написать канонические уравнения

прямой, перпендикулярной плоскости ΔABC и проходящей через точку пересечения плоскости ΔABC с осью OY .

$$\text{Ответ: } x + 2y - z + 4 = 0; M_0(0; -2; 0); L: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Задача 33 Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из т. $P(-1; -5; 4)$ на прямую $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

$$\text{Ответ: } P: x - 2y - z - 5 = 0; t = 2; C'(1; -2; 0); L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{-4}.$$

Задача 34 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

$$\text{Ответ: } 6x - 20y - 11z + 1 = 0.$$

Задача 35 Координаты треугольника ABC – это точки пересечения плоскости $P: x + 2y + 4z - 8 = 0$, в которой он лежит, с координатными осями OX, OY, OZ соответственно. Найти канонические уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости XOY и высоты треугольника, проведенной из вершины C .

$$\text{Ответ: } L: \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{0}; H: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Задача 36 Даны три последовательные вершины прямоугольника

$A(0; 2; -2); B(1; 3; 3); C(-1; 0; 4)$. Написать канонические уравнения сторон AD и CD и уравнение плоскости заданного прямоугольника.

$$\text{Ответ: } \overline{BC} = \{-2; -3; 1\}; AD: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{1}; \\ \overline{AB} = \{1; 1; 5\}; CD: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{5}; P_{ABCD}: 16x - 11y - z + 20 = 0$$

Задача 37 Найти расстояние от т. $P(2; 6; -1)$ до прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$.

Ответ: $P: -3x - y + 3z + 15 = 0$; $t = -1$; $P'(5; 0; 0)$.

Задача 38 Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $C(-2; 3; -5)$, $D(0; 4; -7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 2; -3)$. Найти уравнения стороны AB .

Ответ: $AB: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Задача 39 Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3; -2; 3)$, $B(5; 4; 1)$ и точка пересечения его диагоналей $M(-1; 1; 2)$. Найти уравнения стороны AD .

Ответ: $AD: \frac{x-3}{-10} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{0}$.

Задача 40 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -1; -5)$ перпендикулярно двум плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Ответ: $2x + y - 2z - 15 = 0$.

Задача 41 Найти точку M_1 симметричную точке $M(1; 1; 1)$ относительно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1.5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Ответ: $P: x - 2y + z = 0$; $t = -1$; $M'(1; 0.5; 0)$; $M_1(1; 0; -1)$

Задача 42 Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OZ перпендикулярно плоскости $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

Ответ: $4x + 3y = 0$.

Задача 43 Через точку $(1; 2; 1)$ провести плоскость параллельно прямым

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2} \text{ и } \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $3x - 7y + 2z + 9 = 0$.

Задача 44 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_1(2; 3; 0)$ и отсекающей на оси OZ отрезок длиной 5.

Ответ: $7x - 3y + z - 5 = 0$, $-13x + 7y - z + 5 = 0$.

Задача 45 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 5; 3)$ и пересекающую прямую $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$ под прямым углом.

Ответ: $\frac{x+2}{137} = \frac{y-5}{-83} = \frac{z-3}{-58}$

Задача 46 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3} \text{ и } L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник. В 2 т./Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – Т.2. – 576 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. В 2 т./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. школа, 1980. – Т.1. – 320 с.
3. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии./ Д.В. Клетеник. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
4. Виноградов, И.М. Аналитическая геометрия./И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1986. – 176 с.
5. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия./П.С. Моденов.–М.: Изд-во МГУ,1969. –700 с.

Содержание	Стр.
ГЛАВА 1. Прямая на плоскости	3
§ 1 Вступление	3
§ 2 Задачи, при решении которых используется уравнение прямой $y = kx + b$	4
Примеры решения задач	5
Задачи для самостоятельного решения	8
§ 3 Задачи, при решении которых используется общее уравнение прямой	10
§ 4 Взаимное расположение прямых на плоскости	11
§ 5 Примеры решения задач	15
Задачи для самостоятельного решения	18
ГЛАВА 2. Плоскость.....	19
§ 1 Вступление	19
§ 2 Вывод уравнения плоскости при разных способах ее задания	19
§ 3 Взаимное расположение плоскостей.....	23
ГЛАВА 3. Прямая в пространстве	25
§ 1 Вступление	25
§ 2 Вывод уравнения пространственной прямой при разных способах ее задания	26
§ 3 Взаимное расположение пространственных прямых	29
ГЛАВА 4. Прямая и плоскость в пространстве	32
§ 1 Вступление	32
§ 2 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.....	32
§ 3 Задачи для самостоятельного решения	37
Литература.....	40