

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Вологодский государственный технический университет»  
(ВоГТУ)

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ В ЗАДАЧАХ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов заочной формы обучения

Факультет: Инженерно-строительный  
Направление:  
270800 - строительство  
Специальности:  
270102 – промышленное и гражданское строительство  
270112 – водоснабжение и водоотведение

Вологда  
2011

УДК 620.1

Расчет элементов конструкций на прочность в задачах сопротивления материалов: Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения строительных специальностей. - Вологда: ВоГТУ, 2011.- 78 с.

В учебно-методическом пособии даны теоретические основы некоторых тем курса «Сопротивление материалов», подробно разобраны примеры расчета элементов конструкций на прочность, даны примеры решения и оформления задач для выполнения контрольных работ, рекомендованных для самостоятельного обучения студентов строительных специальностей.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составитель: Комиссарова И.И., к.т.н., доцент,  
Шапкина В.А., к.п.н., доцент

Рецензенты: Зав. кафедрой строительных конструкций и архитектуры  
Череповецкого государственного университета, к.т.н., доцент  
Ворожбянов В. Н.  
Доцент кафедры промышленного и гражданского строительства  
ВоГТУ, к.т.н., доцент Михалевич Н.В.

## Предисловие

Одной из главнейших задач образовательного процесса является формирование самостоятельности как качества личности студента. Задача развития личности состоит в конечном счете в формировании человека с активной жизненной позицией, человека деятельного, развитие которого и должно быть основано на формировании, наряду со знаниями, операционных умений тактического, а главное, стратегического планов.

Для такого образования, требующего организации продуктивной деятельности, необходимо целенаправленное взаимодействие преподавателей и студентов. Для студентов заочного факультета актуальной является такая организация учебного процесса, которая в полной мере являлась бы движущей силой развития студента, обеспечивающей становление всей совокупности качеств личности – знаний, умений, навыков, способов умственных действий. Эффективность такого образования предполагает собственную активность студентов, но для ее достижения необходимо создание методических пособий, которые бы способствовали развитию данной активности.

Решающим фактором самоактуализации является самопознание. Именно такая ситуация возникает при необходимости решения контрольных самостоятельных работ студентами заочного факультета. Авторы настоящей работы преследовали следующую цель – организовать самостоятельную работу таким образом, чтобы у студентов была реальная потенциальная возможность для решения задач. Уникальная особенность сопротивления материалов состоит в том, что любая задача индивидуальна и проблемна. Для их решения в пособиях даны теоретические основы тем и разделов сопромата, присутствуют примеры задач. Наличие дополнительного справочного материала облегчит самостоятельную работу студентов - заочников. Крайне важны в организации самостоятельной работы вопросы ее контроля и анализа, что также присутствует в пособиях.

Авторы пособия надеются, что, при созданных определенных дидактических обстоятельствах, студенты заочного факультета в полной мере смогут сформировать способности самостоятельной работы при решении задач сопротивления материалов.

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов — наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций (сооружений и машин). Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность. Неправильный расчет самой незначительной, на первый взгляд, детали может повлечь за собой очень тяжелые последствия — привести к разрушению конструкции в целом. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее дешевизной, добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала. Необходимо улучшать качество строительства, повышать эффективность проектных решений, применять новые прогрессивные конструкционные материалы с повышенной прочностью.

Сопротивление материалов — один из сложных общетехнических курсов, изучение которого должно обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач. Перед решением каждой задачи необходимо предварительно изучить соответственный теоретический материал курса.

Курс сопротивления материалов базируется на знаниях, полученных студентами при изучении высшей математики, физики и теоретической механики.

Цель настоящего пособия состоит в оказании помощи студенту заочной формы обучения при выполнении самостоятельной работы в виде контрольных работ.

В пособие включены: основные теоретические сведения; алгоритмы к выполнению контрольных работ; подробные решения примеров по разделам и темам; отдельные справочные данные, не нашедшие отражения в учебниках; перечень вопросов для повторения и самоконтроля.

Перечень заданий, включенных в контрольные работы, охватывает основные разделы и темы курса сопротивления материалов, по которым выпускник должен иметь необходимые компетенции, знания и умения: центральное растяжение и сжатие прямолинейных стержней; геометрические характеристики плоских сечений; кручение; плоский поперечный изгиб; сложное сопротивление; устойчивость сжатых стоек; динамическое действие нагрузок.

Перечень и объем контрольных работ указывается в рабочей учебной программе дисциплины и зависит от объема самостоятельной работы студентов, отводимого на изучение курса рабочими учебными планами направлений и специальностей.

## Условные обозначения

$A$  – площадь поперечного сечения,  $\text{м}^2$ ;  
 $E$  – модуль упругости I рода, модуль Юнга, Па;  
 $F$  – внешняя сила, Н;  
 $G$  – модуль сдвига, Па;  
 $H$  – высота падения ударяющего тела, м;  
 $I_x, I_y$  – осевые моменты инерции сечения,  $\text{м}^4$ ;  
 $I_p$  – полярный момент инерции сечения,  $\text{м}^4$ ;  
 $I_{\max}, I_{\min}$  – главные центральные моменты инерции сечения,  $\text{м}^4$ ;  
 $\ell$  – длина стержня или силового участка, м;  
 $M$  – сосредоточенный момент, Нм;  
 $M_x, M_y$  – изгибающие моменты (внутренние), Нм;  
 $M_k$  – крутящий момент (внутренний)  
 $N$  – нормальная или продольная сила (внутренняя), Н;  
 $n$  – коэффициент запаса прочности;  
 $n_y$  – коэффициент запаса на устойчивость;  
 $Q (Q_x, Q_y)$  – поперечная сила (внутренняя), Н;  
 $q$  – погонная нагрузка, Н/м;  
 $R$  – расчетное сопротивление, Па;  
 $S_x, S_y$  – статические моменты площади сечения,  $\text{м}^3$ ;  
 $U, V$  – главные центральные оси;  
 $w$  – перемещение в направлении оси  $z$ , м;  
 $W_x, W_y$  – осевые моменты сопротивления,  $\text{м}^3$ ;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления,  $\text{м}^3$ ;  
 $\sigma (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  – нормальное напряжение, Па;  
 $\sigma_k$  – критическое напряжение, Па;  
 $\tau (\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  – касательное напряжение, Па;  
 $\varphi$  – угол поворота сечения при кручении, град;  
 $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба;  
 $\alpha_0$  – угол, определяющий положение главных центральных осей, град;  
 $\Delta$  – перемещение (линейное, м; угловое, рад);  
 $\Delta \ell$  – абсолютная линейная деформация (удлинение или укорочение), м;  
 $\varepsilon$  – относительная линейная деформация;  
 $\theta$  – относительный (погонный) угол поворота, рад/м;  
 $\lambda$  – гибкость стержня;  
 $\mu$  – коэффициент приведения длины.

## 1. Внутренние силовые факторы. Понятие о напряжениях.

В сопротивлении материалов под внутренними силами понимают силы взаимодействия между частицами элемента, вызванные действием внешних сил. Для определения внутренних сил используют метод сечений: мысленно разрезают нагруженное тело на две части и рассматривают равновесие одной из отсеченных частей. Со стороны отброшенной части на оставшуюся действуют внутренние силы, которые уравнивают действие сил, проложенных к оставшейся части тела. Все внутренние силы приводятся к главному вектору  $R$  и главному моменту  $M$ . Главный вектор  $R$  можно разложить по осям координат и получить  $Q_x$ ,  $Q_y$ , называемые поперечными или перерезывающими силами, и  $N_z$  - продольную силу. Главный момент  $M$  при разложении по осям координат дает два изгибающих момента  $M_x$  и  $M_y$  и крутящий момент  $M_z$ . Эти шесть величин и представляют собой компоненты внутренних силовых факторов.

Для их определения в случае пространственной системы сил можно составить шесть уравнений равновесия, а в случае плоской – три.

Под **напряжениями** следует понимать силы взаимодействия между частицами элемента, приходящиеся на единицу площади.

На площадках перпендикулярных оси стержня будут возникать нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения. Нормальные напряжения всегда действуют перпендикулярно рассматриваемой площадке, а касательные – в плоскости этой площадки:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Q}{A}, \quad \text{где } A - \text{площадь сечения стержня.}$$

Напряжение представляет собой **интенсивность распределения внутренних сил** по площади поперечного сечения. Напряжение всегда служит точной оценкой напряженного состояния любого нагруженного элемента конструкции в отличие от нагрузок  $F$ . Размерность у напряжений:  $[\frac{H}{M^2}, \text{МПа}]$

## 2. Центральное растяжение и сжатие статически определимого ступенчатого стержня

Центральное растяжение – сжатие – такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные (продольные) силы. Рассмотрим две схемы, подвергающиеся растяжению – сжатию (рис.2.1).

При центральном растяжении – сжатии действующие нагрузки приложены по оси стержня. Для определения продольных сил в любом сечении используется метод сечений. Нормальная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил на ось стержня,

расположенную по одну сторону от сечения. Проведем сечение 1 –1 (рис.2.1) и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис.2.2).



Рис. 2.1 – Деформация стержня: а) сжатие; б) растяжение



Рис.2.2– Продольные силы в сечении:

а) сжимающая (отрицательная) продольная сила;

б) растягивание (положительная) продольная сила

Продольная сила в сечении считается положительной, если она растягивает отсеченную часть (рис.2.2,б) и отрицательной, если сжимает отсеченную часть (рис.2.2,а). Спроектируем все силы на ось  $z$ :  $\sum Z = 0$ ;  $F - N = 0$ ;  $N = -F$ , то есть сила  $N$  сжимающая и отрицательная.

Эксперименты показывают, что при центральном растяжении – сжатии сечения в средней части стержня остаются плоскими после нагружения и поступательно перемещаются вдоль оси стержня. Следовательно, все продольные волокна испытывают одинаковое удлинение и укорочение. Действующие по сечению напряжения будут постоянны. В сечениях 1 –1 (рис.2.2) будут действовать только нормальные напряжения  $\sigma$ , определяемые по

формуле (2.1): 
$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

Условие прочности при центральном растяжении-сжатии записывается так:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R, \quad (2.2)$$

где  $R$  – расчетное сопротивление данного материала.

Экспериментально установлена зависимость между нагрузкой, приложенной к стержню, и перемещениями сечений, к которым эта нагрузка приложена:

$$\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}, \quad (2.3)$$

где  $\Delta \ell$  – абсолютное удлинение стержня,  $\ell$  – длина этого стержня,  $A$  – площадь сечения стержня,  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), характеризует упругие свойства материала, то есть способность материала сопротивляться действию внешних сил. Размерность  $E$  – [МПа]. Для каждого из материалов величина модуля упругости имеет свое значение: сталь,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, медь,  $E = 1 \cdot 10^5$  МПа, алюминий,  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа. Значение модуля упругости устанавливается экспериментально. Произведение  $EA$  – называется жесткостью стержня при растяжении – сжатии.

Учитывая, что  $N/A = \sigma$ , выражение (2.3) можно записать так:

$$\Delta \ell = \frac{\sigma \cdot \ell}{E}. \quad (2.4)$$

Выражение :

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \varepsilon \quad (2.5)$$

получило название относительной продольной деформации, тогда в выражении (2.3), разделив на  $\ell$ , имеем

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) носит название закона Гука при растяжении – сжатии. Этот закон был предложен в 1660 г. английским физиком Гуком.

**Пример 1. Ступенчатый стержень закреплен одним концом и нагружен сосредоточенными силами. Длины участков бруса равны  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  площади их поперечных сечений  $A_1, A_2, A_3$ . Материал бруса – сталь с расчетным сопротивлением  $R=210$  МПа .**

**Требуется:** Построить эпюры внутренних сил  $N$ , напряжений  $\sigma$  и основных перемещений  $\Delta \ell$ , оценить прочность стержня.

**Решение:**

**1) Определим продольные силы:** Для этого разбиваем стержень на участки. Границами участков служат: точки приложения сил, места изменения поперечного сечения. На каждом участке мысленно проводим сечение и рассматриваем равновесие любой из отсеченных частей, приложив вместо отброшенной части неизвестную силу  $N$  в положительном направлении (от сечения). Рассматриваем сумму проекций на горизонтальную ось  $Z$  всех сил, расположенных в отсеченной части. Так как в начале задачи мы не определили

реакцию в опоре, то идем от «свободного конца» и отсеченную часть рассматриваем всегда левую.

*I* участок:  $\sum Z = 0; \quad N_1 - 24 = 0; \quad N_1 = 24 \text{ кН.}$

*II* участок:  $\sum Z = 0; \quad -N_2 - 24 + 38,4 = 0; \quad N_2 = 14,4 \text{ кН.}$

*III* участок:  $\sum Z = 0; \quad N_3 - 24 + 38,4 - 28,8 = 0; \quad N_3 = 14,4 \text{ кН.}$

Полученные значения откладываем на графике (эпюре) в виде

прямоугольников, положительные значения сверху, отрицательные снизу.

**2) Определим напряжения на всех участках:** Напряжение при растяжении - сжатии определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \text{ где } N -$$

внутренняя продольная сила на участке,  $A$  - площадь поперечного сечения на данном участке.

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{24 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \cdot 10^7 =$$

$$= 48 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-14,4 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = -2,88 \cdot 10^7 =$$

$$= -28,8 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^{-4}} = 2,06 \cdot 10^7 =$$

$$= 20,6 \text{ МПа}$$

По полученным данным строим эпюру напряжений.

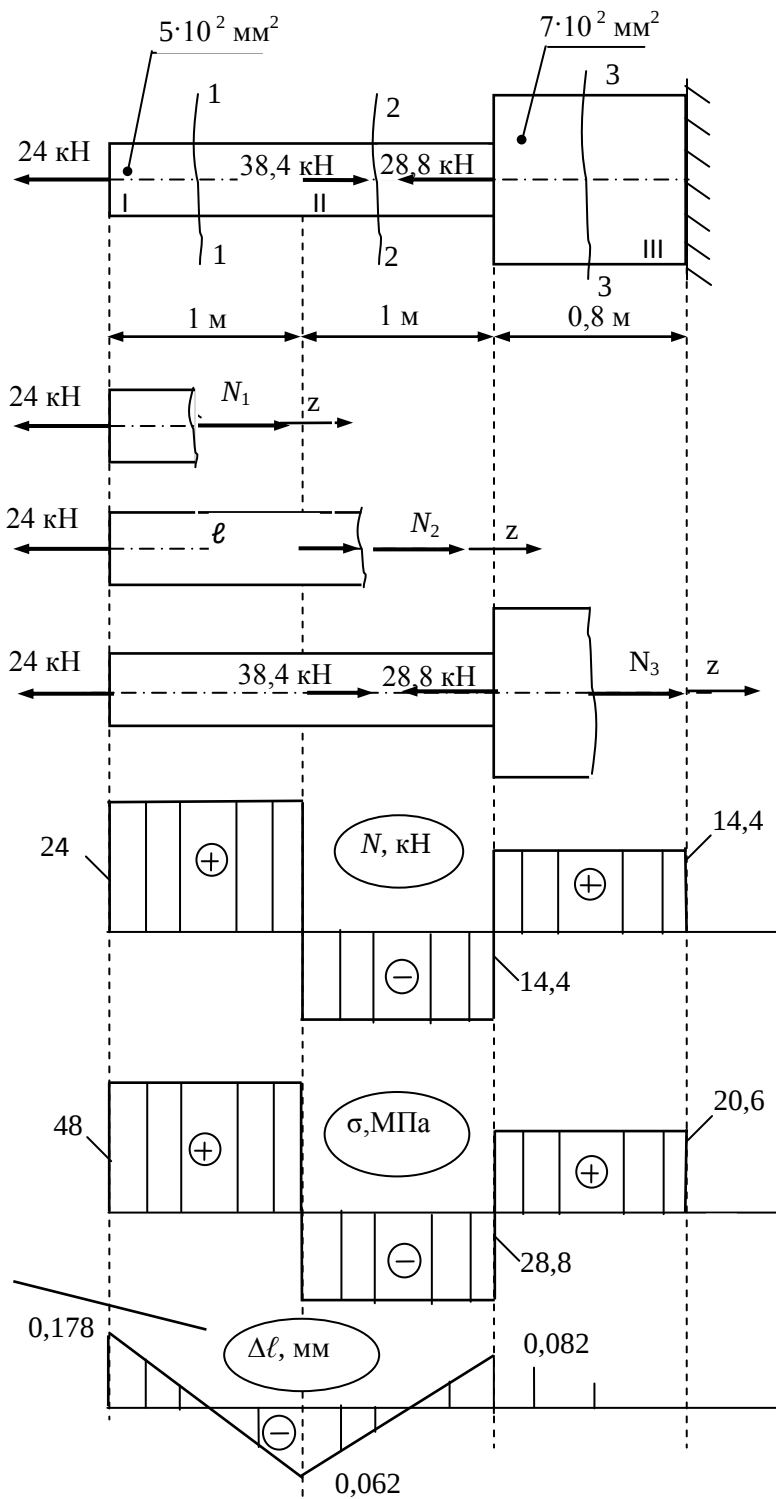


Рис.2.3

3) **Строим эпюру перемещений:** Перемещения точек определяем на границах участков (нарастающим итогом, начиная от опоры). Используем формулу для абсолютной деформации по закону Гука:  $\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}$ , где N –

продольная сила на участке,  $\ell$  – длина участка, A – площадь поперечного сечения на участке, E – модуль упругости (модуль Юнга) материала стержня. В данном примере материал – сталь с  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EA_3} = \frac{14.4 \cdot 10^3 \cdot 0.8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-4}} = 0.082 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0.082 \text{ мм}$$

$$\Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 = \Delta \ell_3 + \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = 0.082 - \frac{14.4 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -0.062 \text{ мм}$$

$$\Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1 = -0.062 + \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = -0.062 + \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0.178 \text{ мм}$$

Эпюра перемещений строится в виде ломаных линий, начиная от опоры справа, где значение перемещения равно нулю.

4) **Оцениваем прочность стержня.** Условие прочности при растяжении или сжатии записывается так:  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R$ .

С эпюры напряжений ( $\sigma$ ) берем самое большое значение напряжения (по модулю) и сравниваем с расчетным сопротивлением. В нашем примере  $\sigma_{\max} = 48 \text{ МПа} \leq R = 210 \text{ МПа}$ , т.е. прочность обеспечена. Если прочность будет не обеспечена, необходимо дать рекомендации по обеспечению прочности: уменьшить нагрузку, увеличить площадь поперечного сечения.

### 3. Статически неопределимые стержневые системы

Пользуясь уравнениями статики, задачи можно решать только в том случае, если число неизвестных усилий не превышает числа уравнений равновесия. При решении задач по сопротивлению материалов часто встречается, когда для определения внутренних усилий, возникающих в элементах конструкций, число уравнений статики оказывается меньше числа искомых неизвестных усилий, то есть задача становится статически неопределимой. Подобные задачи решаются путем добавления к уравнениям статики недостающего числа уравнений, полученных из рассмотрения упругих деформаций системы. Решение таких задач проводится в следующей последовательности:

1. Выясняем усилия, которые необходимо определить.

2. Составляем уравнения равновесия (три для плоской системы сил, шесть для пространственной).
3. Рассматриваем систему в деформированном состоянии и составляем уравнения совместности деформации.
4. Выражаем деформации через усилия по закону Гука.
5. Решаем системой уравнения статики (равновесия) и уравнения совместности деформаций и определяем неизвестные усилия.

**Пример 2. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис.3.1).**

**Требуется найти:**

1. Усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$ ;
2. Допускаемую нагрузку  $Q_{дон}$ ;

**Дано:**  $A = 19 \text{ см}^2$ ,  $a = 2,1 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ,  $c = 1,9 \text{ м}$ ,  $R = 160 \text{ МПа}$

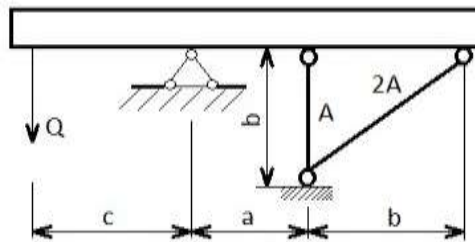


Рис.3.1

1) Записываем уравнение статики – уравнение моментов всех сил относительно опоры, для этого мысленно рассекаем стержни и прикладываем внутренние продольные силы  $N$  в положительном направлении (рис.3.2). Момент против часовой стрелки берем со знаком «+», а по часовой – знак «-», следует учесть, что момент вокруг опоры во втором стержне будет давать только вертикальная составляющая продольной силы, а момент от горизонтальной составляющей будет равен нулю.

$$\sum M_c = 0, \quad Q \cdot c - N_1 \cdot a - N_2 \cdot (a + b) \sin 45^\circ = 0, \quad 1.9Q - 2.1N_1 - 3.6N_2 = 0 \quad (3.1)$$

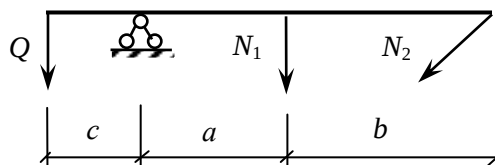


Рис.3.2

2) Рассматриваем систему в деформированном состоянии и составляем уравнение совместности деформаций. Под действием силы  $Q$  произойдет поворот жесткого (горизонтального) стержня против часовой стрелки, при этом точки  $A$  и  $B$  перемещаются строго по вертикали (рис.3.3). Первый стержень удлинится (вертикально) на величину  $AA' = \Delta \ell_1$ , второй слегка поворачивается и растягивается на величину  $B''B' = \Delta \ell_2$ . Если стержни будут сжиматься, то их абсолютную деформацию ( $\Delta \ell$ ) брать со знаком «-», Треугольники  $CAA'$  и  $CBV'$  подобны. Из подобия треугольников следует пропорциональное соотношение их сторон:  $\frac{AA'}{a} = \frac{BB'}{a + \varphi}$ ,  $BB' = \frac{B''B'}{\sin 45^\circ}$ ,

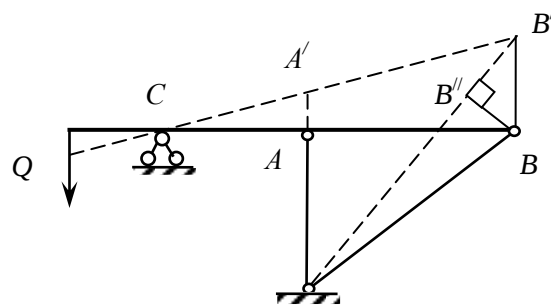


Рис.3.3

$$\frac{\Delta \ell_1}{a} = \frac{\Delta \ell_2}{0.707(a + \varphi)}, \quad \Delta \ell_1 = 0.582 \Delta \ell_2 \quad (3.2)$$

Из закона Гука имеем:  $\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1}$ ,  $\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}$ .

По условию задачи:  $A_1 = A$ ,  $A_2 = 2A$ ,  $\ell_1 = \varphi = 3\text{ м}$ ,

$$\ell_2 = \frac{\varphi}{\sin 45^\circ} = 4.24\text{ м}, \text{ - из геометрических соображений.}$$

Подставляем в уравнение (3.2):  $\frac{3N_1}{EA} = \frac{0.582N_2 \cdot 4.24}{2EA}$ ,  $N_1 = 0.41N_2$ ,

Используем уравнение равновесия и туда подставляем выведенное выше соотношение продольных сил:

$$1.9Q - 2.1 \cdot 0.41N_2 - 3.6N_2 = 0, \quad \text{откуда } N_2 = 0.43Q \text{ и } N_1 = 0.41N_2 = 0.18Q$$

Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности:

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0.18Q}{19 \cdot 10^{-4}} \leq R \quad \Rightarrow Q \leq 1690 \text{ кН}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0.43Q}{2 \cdot 19 \cdot 10^{-4}} \leq R \quad \Rightarrow Q \leq 1414 \text{ кН}$$

За допускаемую нагрузку принимаем минимальную из найденных сил, т.е. ответом к этой задаче будет  $Q_{\text{дон}} = 1414 \text{ кН}$ .

**Пример 3. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис.3.4).**

**Требуется найти:**

- 1) Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$ ;
- 2) Найти допускаемую нагрузку, приняв наибольшее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;
- 3) Найти предельную грузоподъемность системы  $Q_T^K$  и допускаемую нагрузку  $Q_{\text{доп}}$ , если предел текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$  и запас прочности  $K=1,5$ .
- 4) Сравнить величины  $Q_{\text{доп}}$ , полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

**Дано:**  $A_1 = A = 10 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 2A = 20 \text{ см}^2$ ;  $a = 1,6 \text{ м}$ ;  $b = 3,0 \text{ м}$ ;  $c = 4,0 \text{ м}$ .

**Решение:**

Данная задача один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости необходимо решить совместное уравнение равновесия и уравнение совместности деформации стержней.

Освободимся от связей, для чего мысленно отбрасываем опорный шарнир А и шарниры К и Д и заменяем их влияние на конструкцию реакций  $x_A$ ,  $y_A$  и усилиями в стержнях  $N_1$  и  $N_2$  (рис.3.5).

Составим уравнения равновесия бруса:

$$\begin{aligned}\sum x &= 0; & x_A + N_1 \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum y &= 0; & y_A + N_2 + N_1 \sin 45^\circ - Q &= 0; \\ \sum m &= 0; & N_2 a + N_1 \cos 45^\circ - Q b &= 0.\end{aligned}$$

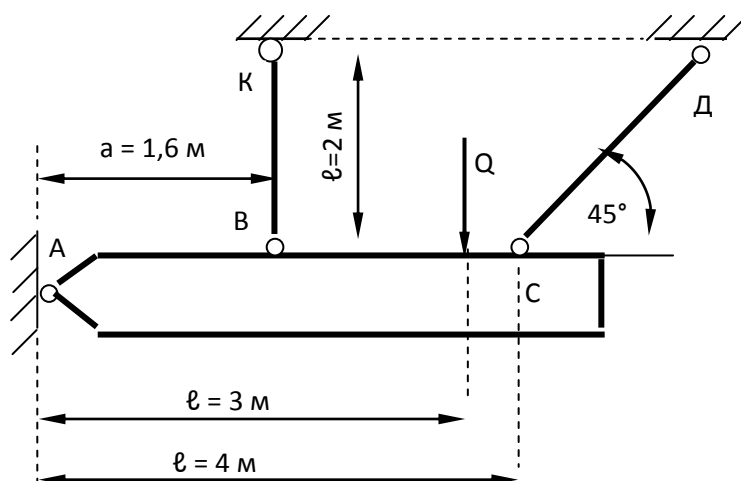


Рис.3.4 – Заданная система

В этих уравнения четыре неизвестных. Для составления уравнения совместности стержней ВК и СД рассмотрим деформацию конструкций под действием силы  $Q$  (рис.3.6).

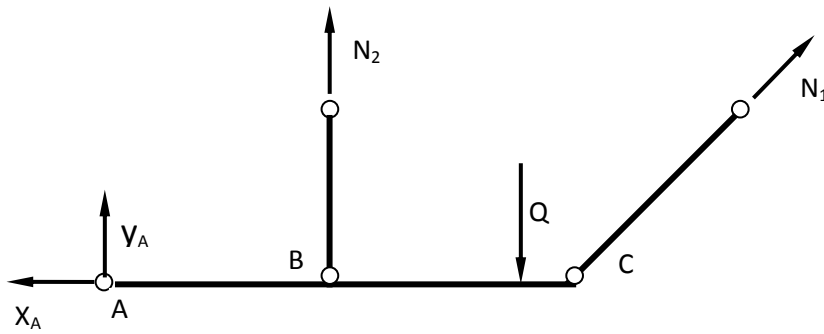


Рис.3.5 – Силловая схема

Под действием силы  $Q$  абсолютно жесткий стержень  $AC$  повернется относительно опоры  $A$  на некоторый угол. Перемещение шарнира  $B$  и  $C$  принимаем направленными вертикально вниз. Поэтому абсолютное удлинение стержня  $BK$  равно:  $\Delta\ell_2 = BV$ . Для определения абсолютного удлинения  $\Delta\ell_1$  стержня  $CD$  построим  $\Delta BB_1V_2$ , для этого опустим из точки  $C$  перпендикуляр  $CC_2$  на новое положение стержня  $C_1D$ . Тогда  $CD \approx C_2D$  и  $\Delta\ell_1 = C_1C_2$ .

Из  $\Delta CC_1C_2$  получаем:  $C_1C_2 = CC_1 \cos 45^\circ = \Delta\ell_1$ , откуда:  $CC_1 = \frac{\Delta\ell_1}{\cos 45^\circ}$ .

Из подобия  $\Delta ABV_1$  и  $\Delta ACC_1$  находим:  $\frac{BV_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$  или  $\frac{\Delta\ell_2}{a} = \frac{\Delta\ell_1}{c \cdot \cos 45^\circ}$ .

Это и есть уравнение совместной деформации. На основании закона Гука:

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 d}{E \cdot A_1 \cos 45^\circ} \text{ и } \Delta\ell_2 = \frac{N_2 d}{2E \cdot A_2}.$$

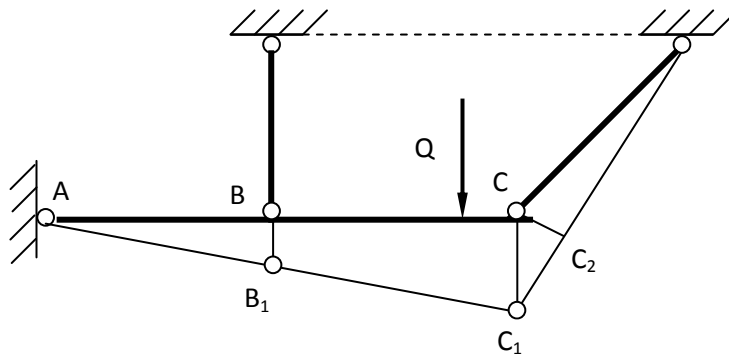


Рис.3.6 – Деформационная схема

Подставляем эти неравенства в предыдущие соотношения и учитываем, что  $A_1 = 2A_2$

$$\frac{N_1 \ell}{dEA_2} = \frac{N_1 \ell}{2EA_2 \cos 45^\circ} \text{ или } N_1 = \frac{c}{a} N_2.$$

Для определения внутренних сил  $N_1$  и  $N_2$  решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -Qb + N_2a + N_1 \cos 45^\circ \cdot c = 0 \\ N_1 = \frac{c}{a} N_2 \end{cases}$$

Подставляем  $N_1$ , имеем:  $-Qd + N_2a + \frac{c^2}{a} N_2 \cos 45^\circ = 0$ ,

$$N_2 = \frac{Qb}{a + \frac{c^2}{a} \cos 45^\circ} = \frac{Q \cdot 3}{1,6 + \frac{4^2}{1,6} \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,35Q, \quad N_1 = \frac{c}{a} N_2 = \frac{4}{1,6} 0,35Q = 0,86Q.$$

Очевидно, что усилие в первом стержне больше, чем во втором. Напряжение в этом стержне:  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{0,86Q}{A}$ .

Условия прочности:  $\sigma_1 \leq [\sigma]$  или  $\frac{0,86Q}{A} \leq [\sigma]$ ,  $\frac{0,86Q}{A} \leq 160 \cdot 10^6$ , тогда допустимая нагрузка определится:

$$[Q_1] = \frac{160 \cdot 10^6}{0,86} A = \frac{160 \cdot 10^6}{0,86} 10 \cdot 10^{-4} = 1,86 \cdot 10^5 \text{ Н} = 18964 \text{ Н}.$$

Напряжение во втором стержне:  $\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{0,175Q}{A}$  или  $\frac{0,175Q}{A} \leq 160 \cdot 10^6$ ,

тогда  $[Q_2] = \frac{160 \cdot 10^6}{0,175} 10 \cdot 10^{-4} = 9,14 \cdot 10^5 \text{ Н}.$

Итак, исходя из расчета по допускаемым напряжениям допустимая нагрузка:  $[Q] = [Q_1] = 1,86 \cdot 10^5 \text{ Н}.$

Определяем усилия в стержнях при достижении предельного состояния:

а) в первом  $N_1 = \sigma_T \cdot A = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 10}{10^4} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Н};$

б) во втором  $N_2 = \sigma_T \cdot 2A = \frac{2 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 10}{10^4} = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Н}.$

Предельное состояние наступит тогда, когда второй стержень исчерпает несущую способность и напряжения в нем достигнут предела текучести.

Из уравнения равновесия имеем:  $-Q_T^K \cdot c + 4,8 \cdot 10^5 \cdot a + 2,4 \cdot 10^5 \cdot \cos 45^\circ = 0$ ,

$$-Q_T^K = \frac{4,8 \cdot 10^5 \cdot 1,6 + 2,4 \cdot 10^5 \cdot 2 / 2 \cdot 4}{3,0} = 4,86 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Допустимая предельная нагрузка:  $Q_{\text{доп}} = \frac{Q_T^K}{k} = \frac{4,86 \cdot 10^5}{1,5} = 3,24 \cdot 10^5 \text{ Н}.$

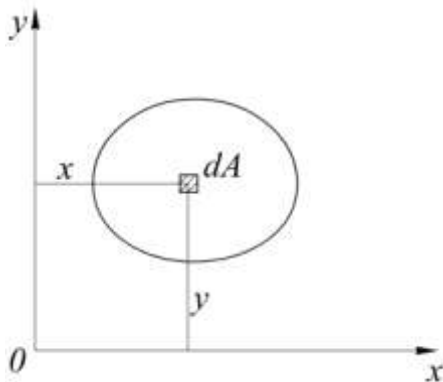
При расчете по допускаемым нагрузкам увеличение нагрузки составляет:

$$n = \frac{Q_{\text{доп}}}{[Q]} = \frac{3,24 \cdot 10^5}{1,86 \cdot 10^5} = 1,74.$$

#### 4. Геометрические характеристики плоских сечений

К геометрическим характеристикам сечений относятся:

- **Площадь сечения** – есть «сумма элементарных площадок  $dA$ ».



$$A = \int_A dA > 0, [m^2]$$

Рис.4.1

- **Статические моменты площади.**

Статический момент площади сечения относительно оси есть «сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния до оси»:

$$S_y = \int_A x dA, \quad S_x = \int_A y dA \quad [m^3] \quad (4.1)$$

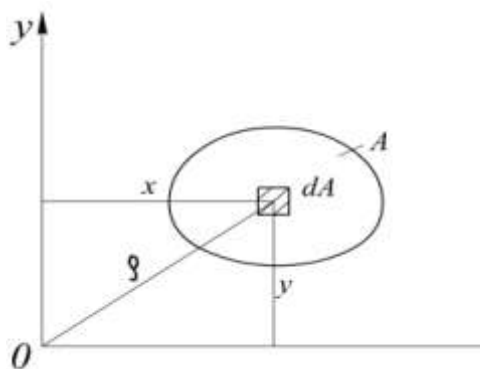
Он может быть положительный, отрицательный или равен «0».

Если положение центра тяжести сечения уже известно, то статический момент его площади относительно любой оси можно вычислить по формуле:

$S_x = y_C A$ ;  $S_y = x_C A$ , где  $x_C$ ;  $y_C$  - координаты центра тяжести сечения.

При этом обязательно следует учесть знак координаты  $x_C$ ;  $y_C$ .

- **Моменты инерции сечения**



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA,$$

$$I_{xy} = \int_A yx \cdot dA \quad [m^4] \quad (4.2)$$

Рис.4.2

- Осевые моменты инерции, каждый из которых представляет собой «сумму произведений элементарных площадок  $dA$  на квадрат их расстояний до этой оси»

Эти моменты инерции всегда положительны и не могут равняться нулю.

- Центробежный момент инерции, который есть «сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояние до двух взаимно перпендикулярных осей».

Такой момент инерции способен принимать любое значение.

- Полярный момент инерции, представляет собой «сумму произведений элементарных площадок  $dA$  на квадрат их расстояния до точки (полюса)».

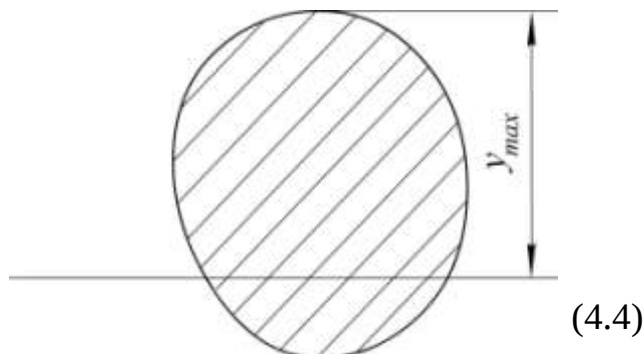
### - Радиус инерции

Радиусом инерции называют корень квадратный из отношения момента

инерции к площади сечения, т.е.:  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; [M]. \quad (4.3)$

### - Моменты сопротивления

Осевой момент сопротивления ( $W$ ) представляет собой отношение осевого момента инерции относительно оси к расстоянию от этой оси до наиболее удаленной точки сечения:

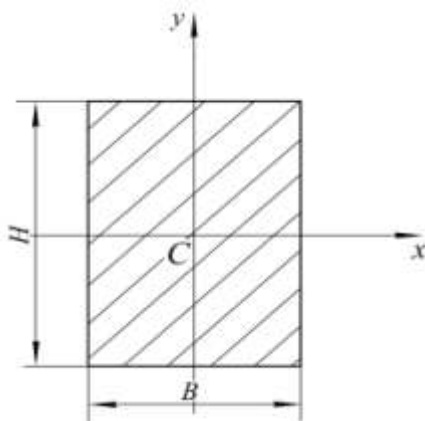


$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|};$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|}; \quad [M^3]$$

### Моменты инерции некоторых простых сечений

- прямоугольное сечение со сторонами  $B$  и  $H$

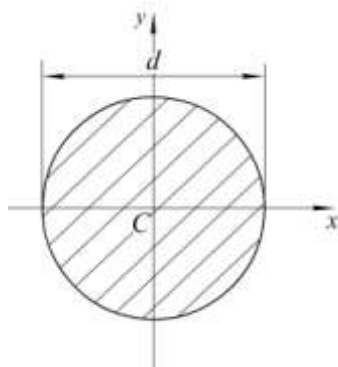


$$I_x = \frac{BH^3}{12};$$

$$I_y = \frac{HB^3}{12};$$

$$I_{xy} = 0;$$

- круглое сечение с диаметром  $d$ .

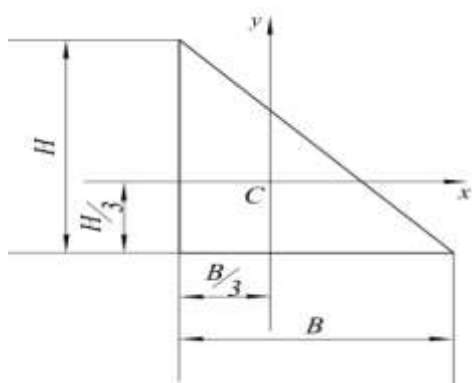


$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$I_{xy} = 0.$$

- треугольное сечение

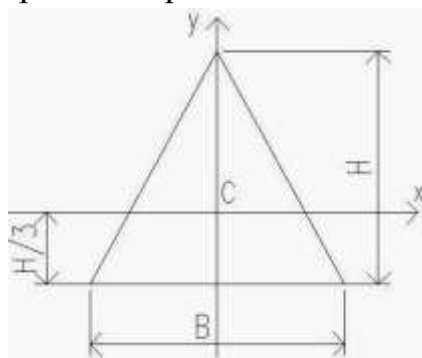


$$I_x = \frac{BH^3}{36};$$

$$I_y = \frac{HB^3}{36};$$

$$I_{xy} = \pm \frac{H^2 B^2}{72};$$

для равнобедренного:

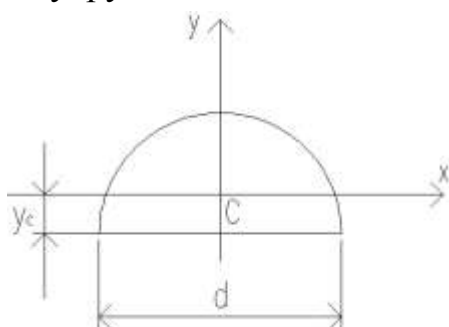


$$I_x = \frac{BH^3}{36};$$

$$I_y = \frac{HB^3}{48};$$

$$I_{xy} = 0;$$

- полукруг



$$I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128};$$

$$I_x = 0,00686 \cdot d^4;$$

$$y_c = 0,212 \cdot d;$$

$$I_{xy} = 0.$$

Для прокатного профиля (двутавр, швеллер, уголок) существуют специальные таблицы (сортамент прокатной стали), где приведены все геометрические характеристики. (Приложение 2)

Ни полярный, ни осевые моменты инерции относительно центральных осей никогда не равняются нулю ( в отличие от статических моментов)!

### **Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей**

Формулы «перехода» от центральных осей любого сечения к им параллельным произвольным осям:

$$\begin{aligned}I_x &= I_{xc} + a^2 \cdot A, \\I_y &= I_{yc} + b^2 \cdot A, \\I_{xy} &= I_{xcyc} + a \cdot b \cdot A,\end{aligned}\tag{4.5}$$

где  $a$  и  $b$ - расстояния между, соответственно, осями  $X$  и  $X_c$  и осями  $Y$  и  $Y_c$

### **Изменение моментов инерции при повороте осей на угол $\alpha$**

Формулы «перехода» от центральных осей любого сечения к осям, проведенным под углом  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \\I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Из формул (4.6) вытекает замечательное следствие, которое часто используется в качестве контроля, проверки.

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{Const}$$

Сумма осевых моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей не меняется при повороте осей.

### **Главные оси и главные моменты инерции**

В любой точке плоскости существуют такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения (максимальное и минимальное). Такие оси называются главными, а осевые моменты инерции относительно этих осей –главными моментами инерции.

Если главные оси проходят к тому же и через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями, а осевые моменты инерции – главными центральными моментами инерции.

Практическое значение имеют именно эти главные центральные оси (обозначим их  $U$  и  $V$ ) и главные центральные моменты инерции ( $I_U$  и  $I_V$ ), поскольку они входят во все расчетные формулы сопротивления материалов.

Найти положение главных центральных осей можно из условия :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (4.7)$$

Этому условию удовлетворяют сразу два значения угла, отличающихся на  $90^\circ$ , значит формула определяет положение сразу обеих главных центральных осей. Найденное из этого условия значение угла  $\alpha_0$  откладывается между максимальной главной осью и той из центральных осей, относительно которой момент инерции больше.

Для определения же величин самих главных центральных моментов инерции можно воспользоваться первыми двумя формулами из группы (4.6) при подстановке в них  $\alpha = \alpha_0$ , найденного по (4.7):

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0$$

Или, освободившись от тригонометрических функций, по формуле:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (4.7)$$

Максимальный главный центральный момент инерции получаем, если перед корнем оставим знак «+», а минимальный – когда оставим знак «-» .

### **Признаки главных осей для симметричных сечений**

- Если сечение имеет одну ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей. Другая главная центральная ось перпендикулярна ей и проходит через центр тяжести сечения.
- Если сечение имеет две оси симметрии, то именно эти оси и являются главными центральными.

**Пример 4.** Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка (рис. 4.3), требуется определить геометрические характеристики сечения:

**Ход решения задачи:**

1) Вычертить сечение в масштабе (рис.4.3). При этом соблюдаем габариты прокатных профилей, а радиусы закруглений берем произвольно.

2) Разбить на простейшие фигуры: в нашем примере две фигуры:

1. Швеллер №30:  $h=30\text{см}$ ,  $b=10\text{см}$ ,

2. Уголок  $100\times 100\times 12$ ,

3) В каждой фигуре найти собственный центр тяжести  $C_1$  ( $z_0=2,52\text{см}$ ), и  $C_2$  ( $x_0=2,91\text{см}$ ), провести собственные оси  $x_1; y_1$  и  $x_2; y_2$ . Расстояния до центра тяжести  $z_0$  и  $x_0$  берем из ГОСТ по своему заданному номеру профиля (сортамент), который приведен в приложении 2.

4) Выбрать вспомогательные оси  $x_0; y_0$ . Вспомогательные оси можно выбирать произвольно, но так, чтобы до них легко было определить расстояния от центра тяжести каждой фигуры. В данном примере вспомогательная ось  $y_0$  проведена между фигурами, а ось  $x_0$  – по низу рисунка.

5) Относительно вспомогательных осей определить центр тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum S_{y0}}{\sum A} = \frac{A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{40,5 \cdot 2,52 + 22,8 \cdot (-2,91)}{40,5 + 22,8} = \frac{35,712}{63,3} = 0,56\text{см},$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x0}}{\sum A} = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{40,5 \cdot 15 + 22,8 \cdot 2,91}{63,3} = 10,65\text{см},$$

где:  $A_1=40,5\text{см}^2$ ,  $A_2=22,8\text{см}^2$  – площади фигур (по сортаменту),

$x_{c1}$ ,  $x_{c2}$  – расстояния от центров тяжести фигур до вспомогательной оси  $y_0$ ,

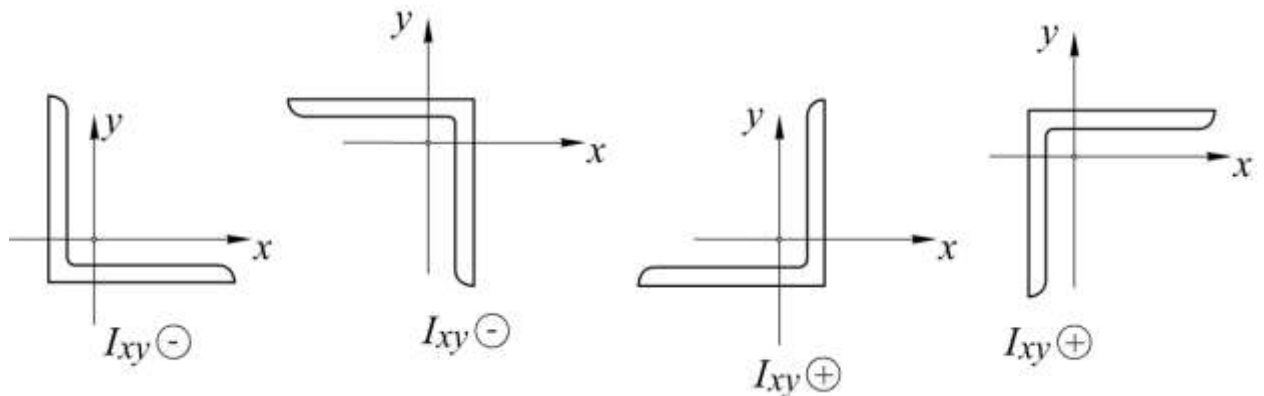
$y_{c1}$ ,  $y_{c2}$  – расстояния от центров тяжести фигур до вспомогательной оси  $x_0$ .

По полученным координатам в системе вспомогательных осей отмечаем точку (центр тяжести всей фигуры) и проводим центральные оси  $X, Y$ .

6) Определить моменты инерции простых фигур по сортаменту.

Для швеллера:  $I_{x1} = 5810\text{см}^4$ ,  $I_{y1} = 327\text{см}^4$  (из сортамента),  $I_{x1y1} = 0$  (т.к. фигура имеет ось симметрии)

Для уголка:  $I_{x2} = I_{y2} = 208,9\text{см}^4$ ,  $I_{x2y2} = 122\text{см}^4$  (из сортамента), знак центробежного момента инерции зависит от расположения уголка.



7) Найти момент инерции всей фигуры относительно центральных осей, используя формулы перехода между параллельными осями

$$I_x = I_{x1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{x2} + a_2^2 \cdot A_2 = 5810 + 4,35^2 \cdot 40,5 + 208,9 + (-7,74)^2 \cdot 22,8 = 8151,15 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_{y1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{y2} + b_2^2 \cdot A_2 = 327 + 1,96^2 \cdot 40,5 + 208,9 + (-3,47)^2 \cdot 22,8 = 966,03 \text{ см}^4$$

$$I_{xy} = I_{x1y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + I_{x2y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 = 0 + 4,35 \cdot 1,96 \cdot 40,5 + 122 + (-7,74) \cdot (-3,47) \cdot 22,8 = 1079,66 \text{ см}^4$$

Здесь:  $a_i$  – расстояния между центральной осью  $X$  и собственными осями  $X_i$  каждой фигуры,  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $Y$  и собственными осями  $Y_i$  (берется со знаком «+», если отрезок выше или правее центральной оси, со знаком «-», если ниже или левее центральной оси)

Центробежный момент инерции  $I_{xy} \neq 0 \Rightarrow$  значит, оси  $X; Y$  не являются главными.

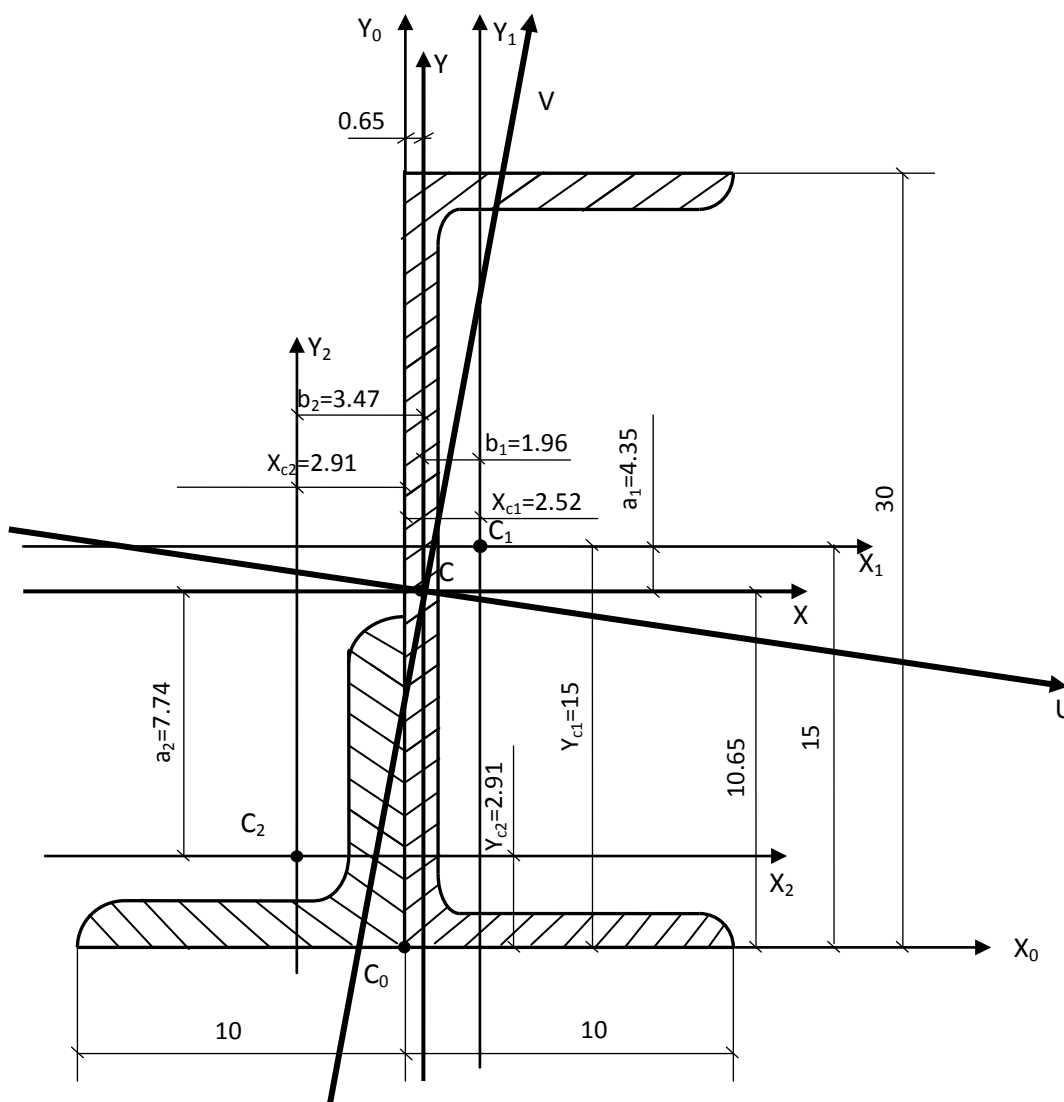


Рис. 4.3

8) Определить положение главных осей через угол  $\alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 1079,66}{966,02 - 8151,15} = -0,3, \quad 2\alpha_0 = -17^\circ \Rightarrow \alpha_0 = -8,5^\circ$$

Знак «-» означает, что надо повернуть оси  $X, Y$  по часовой стрелке.

9) Определить главные моменты инерции

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{8151,15 + 966,02}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8151,15 - 966,02}{2}\right)^2 + 1079,66^2}$$

$$= 4558,56 \pm 3751,29$$

Для определения максимального момента инерции учитываем знак «+», для минимального «-».

$$I_{\max} = 8309,88 \text{ см}^4 = I_u, \quad I_{\min} = 807,295 \text{ см}^4 = I_v$$

10) Проверка:

Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная:

$$I_x + I_y = I_u + I_v$$

$$8151,15 + 966,02 = 8309,88 + 807,295 \quad 9117,17 = 9117,17$$

Пример решения данной задачи с помощью программы Excel приведен в приложении 1.

**Пример 5.** Для заданного сечения (рис.4.4) требуется найти положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

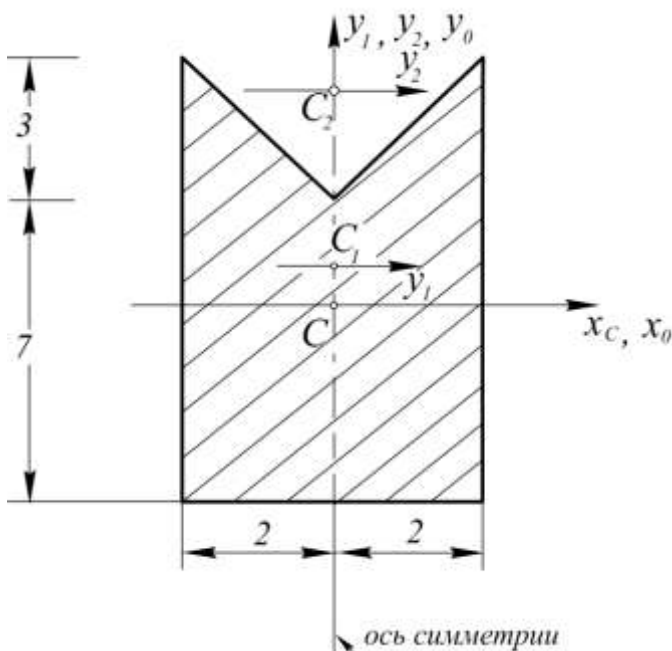


Рис. 4.4

**Решение.**

Начнем с определения положения центра тяжести сечения. Разумеется, центр тяжести находится на оси симметрии. Поэтому нам остается найти лишь одну координату центра тяжести, а именно  $y_c = ?$

С этой целью выбираем любую ось, перпендикулярную оси симметрии, например  $x_1$ , и относительно этой оси вычисляем статический момент сечения.

При этом «разобьем» сечение на большой прямоугольник  $10 \times 4$  и треугольник  $10 \times 3$ .

Положение центров тяжести этих фигур нам известно (точки  $C_1$  и  $C_2$ ).  
Итак,  $S_{x_1} = S_{x_1}^1 - S_{x_1}^2 = 0 - 24 = -24 \text{ см}^3$

$$S_{x_1}^1 = A_1 \cdot 0 = 0, \quad S_{x_1}^2 = A_2 \cdot (C_1 C_2) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left( \frac{10}{2} - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = 6 \cdot 4 = 24 \text{ см}^3$$

$$\text{общая площадь } A = A_1 - A_2 = 10 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 40 - 6 = 34 \text{ см}^2$$

$$\text{Тогда: } y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{-24}{34} = -0,7 \text{ см.}$$

Значит, центр тяжести лежит на 0,7 см ниже оси  $x_1$ . Далее, на основании признака (ось  $Y$  является осью симметрии) можно утверждать, что ось симметрии и перпендикулярная ей ось  $x_c$  и являются главными центральными осями. Обозначим их на схеме буквами  $x_0$  и  $y_0$ .

И нам остается лишь вычислить значения моментов инерции сечения относительно каждой из этих осей, пользуясь ранее найденными формулами для простых фигур и формулами перехода при параллельном переносе осей.

$$I_{x_0} = I_{x_0}^1 - I_{x_0}^2$$

$$I_{x_0}^1 = I_{x_1}^1 + A_1 \cdot a_1^2 = \left( \frac{BH^3}{12} \right) + A_1 \cdot a_1^2 = \frac{4 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot (0,7)^2 = 353 \text{ см}^4, \text{ где } a_1 = 0,7 \text{ см}$$

$$I_{x_0}^2 = I_{x_2}^2 + A_2 \cdot a_2^2 = \left( \frac{BH^3}{36} \right) + A_2 \cdot a_2^2 = \frac{4 \cdot 3^3}{36} + 6 \cdot (4,7)^2 = 135 \text{ см}^4, \text{ где}$$

$$a_2 = \frac{10}{2} + 0,7 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 4,7 \text{ см}$$

$$\text{Тогда } I_{x_0} = 353 - 135 = 218 \text{ см}^4 = I_{\max}.$$

$$I_{y_0} = I_{y_0}^1 - I_{y_0}^2, \quad I_{y_0}^1 = \left( \frac{HB^3}{12} \right) = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,3 \text{ см}^4, \quad I_{y_0}^2 = \left( \frac{HB^3}{48} \right) = \frac{3 \cdot 4^3}{48} = 4 \text{ см}^4.$$

Обратите внимание: здесь никакого перехода не требуется, поскольку ось  $y_0$  совпадает с собственной центральной осью каждой из фигур. Тогда  $I_{y_0} = 53,3 - 4 = 49,9 \text{ см}^4 = I_{\min}$

Данные моменты инерции и являются главными.

## 6. Кручение стального вала

Кручением называют такой случай нагружения стержня, при котором в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты. Деформации кручения возникают под действием крутящих моментов, расположенных перпендикулярно валу. Стержень, работающий на кручение, называется вал.

Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов, расположенных от рассматриваемого сечения.

Каждое поперечное сечение поворачивается относительно друг друга на некоторый угол  $\varphi$ , называемый углом закручивания (поворота).

Для определения напряжений и деформации используются следующие гипотезы:

- Все поперечные сечения остаются плоскими после деформации.
- Радиусы, проведённые в сечениях, остаются прямыми.
- Расстояние между сечениями не изменяются, то есть нормальные напряжения вдоль оси  $z$  равны нулю.

Кручение можно рассматривать как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом сечений относительно друг друга. Следовательно, при кручении возникают только касательные напряжения, которые определяются по формуле:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{\kappa} \cdot \rho}{I_{\rho}}. \quad (5.1)$$

Выражение (5.1) определяет касательные напряжения в любой точке сечения. Напомним, что  $\rho$  изменяется от нуля до  $r$ .

$$\text{Отношение } \frac{I_{\rho}}{r} = W_{\rho} \quad (5.2)$$

получило название момента сопротивления при кручении.

Тогда максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}}. \quad (5.4)$$

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}} \leq R_{\text{кр}}. \quad (5.5)$$

Определение угол закручивания.

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}, \quad (5.6)$$

где  $l$  – длина рассматриваемого участка вала.

Величину  $G \cdot I_{\rho}$  называют жёсткостью вала при кручении. Она характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жёсткость стержня при кручении. На протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки, поэтому суммарный угол закручивания может быть равен нулю, в то время, как на отдельных участках он окажется большим. Для

оценки жёсткости стержня вводится другая мера – относительный угол закручивания  $\theta$ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{d\tau}; \quad \vartheta = \frac{M_{\kappa}}{GI_{\rho}}.$$

Условие жёсткости:  $\theta \leq [\theta],$  (5.7)

где допускаемый угол  $[\theta]$  равен  $0,15^{\circ}$ - $2^{\circ}$  на метр длины.

Напомним, что в выражениях (5.6) и (5.7) угол  $\varphi$  определяется в радианах.

**Пример 6:** К стальному валу приложены три известных момента:  $M_1 = 1 \text{ кНм}$ ,  $M_2 = 1,5 \text{ кНм}$ ,  $M_3 = 2,0 \text{ кНм}$ .

$$a = 1,2 \text{ м}, \quad b = 1,4 \text{ м}, \quad c = 1,0 \text{ м}, \quad R_{\kappa p} = 80 \text{ МПа}$$

**Требуется:** 1) установить, при каком значении  $X$  угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении  $R_{\kappa p}$  определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины, соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручивания (в градусах на 1м длины).

**Решение:** Обозначим границы участков русскими буквами  $A, \dots, D$ .

1. Записываем условие, что поворот правого кольцевого сечения вала равен нулю.  $\varphi_D = 0$

Поворот правого сечения вала будет складываться из суммы углов закручивания вала на каждом участке:  $\varphi_D = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV}$

Угол закручивания вала на участке определяется по формуле:  $\varphi_i = \frac{M_{ki} * l_i}{G_i * I_{pi}},$

где:  $M_{ki}$  - внутренний крутящий момент на данном участке,

$l_i$  - длина участка,

$G_i$  - модуль сдвига (для стали  $G = 0,8 * 10^{11} \text{ Па}$ ),

$I_{pi} = \frac{\pi * d^4}{32}$  - полярный момент инерции.

$$\varphi_D = \frac{M_{kI} * a}{G * I_p} + \frac{M_{kII} * c}{G * I_p} + \frac{M_{kIII} * b}{G * I_p} + \frac{M_{kIV} * a}{G * I_p} = 0$$

Так как вал имеет постоянное поперечное сечение, то

$$G * I_p = const, \Rightarrow M_{kI} * a + M_{kII} * c + M_{kIII} * e + M_{kIV} * a = 0$$

Определяем внутренние крутящие моменты на участках методом сечений. На каждом участке мысленно проводим сечение и рассматриваем равновесие всегда правой отсеченной части:

$$M_{kI} = X$$

$$M_{kII} = X - M_3 = X - 2000$$

$$M_{kIII} = X - M_3 + M_2 = X - 2000 + 1500 = X - 500$$

$$M_{kIV} = X - M_3 + M_2 - M_1 = X - 2000 + 1500 - 1000 = X - 1500$$

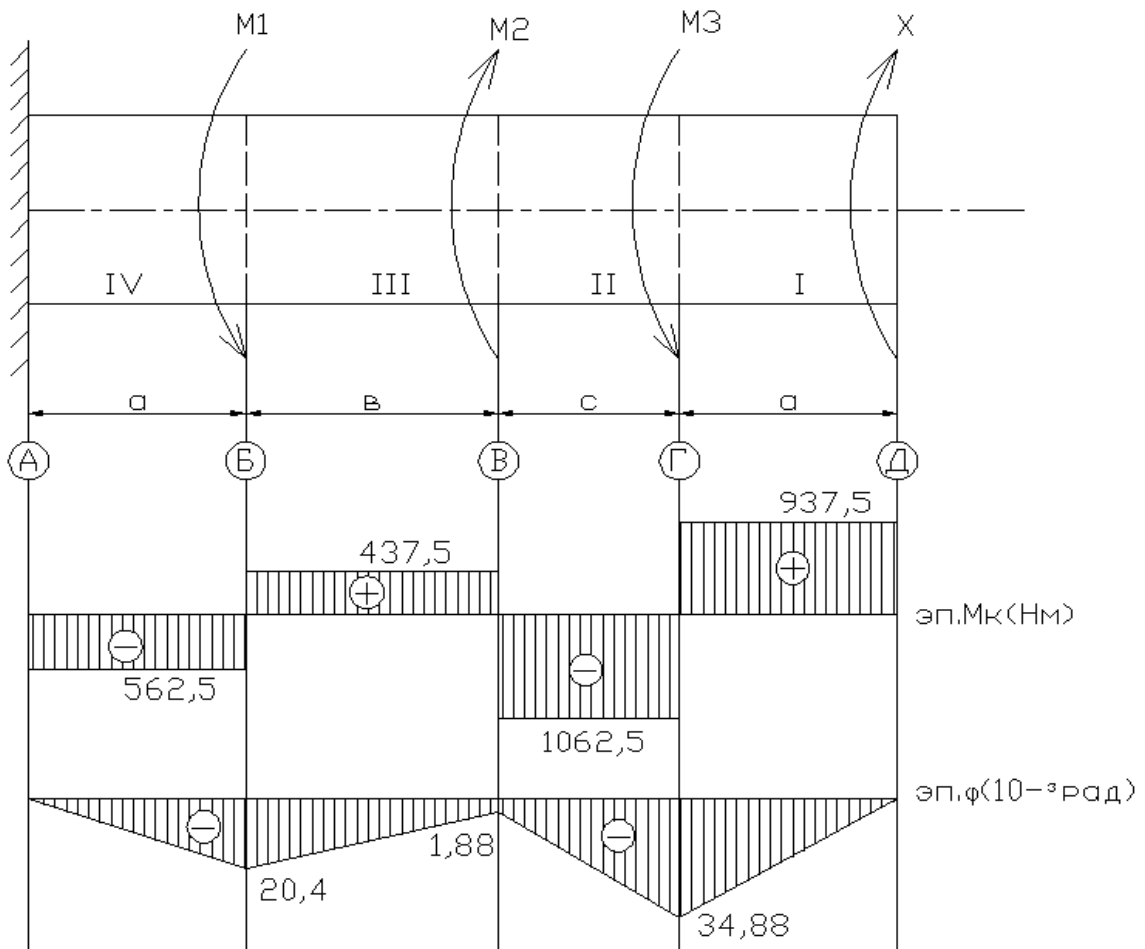


Рис. 5.1-Расчетная схема

Подставляем в уравнение для угла поворота:

$$X * a + (X - 2000) * c + (X - 500) * e + (X - 1500) * a = 0$$

$$X * 1,2 + (X - 2000) * 1 + (X - 500) * 1,4 + (X - 1500) * 1,2 = 0$$

$$X * (1,2 + 1 + 1,4 + 1,2) = 2000 + 700 + 1800 \Rightarrow 4,8X = 4500, X = 937,5 \text{ Нм}$$

II. Строим эпюру крутящих моментов. Для этого подставляем в выражения для **Мк** найденные значения **X**.

$$M_{kI} = 937,5 \text{ Нм}, \quad M_{kII} = 937,5 - 2000 = -1062,5 \text{ Нм}$$

$$M_{kIII} = 937,5 - 500 = 437,5 \text{ Нм}, \quad M_{kIV} = 937,5 - 1500 = -562,5 \text{ Нм}$$

Полученные значения откладываем в виде ординат на эпюре (см. рис.5.1)

III. Определяем диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}^{\max}}{W_p} \leq R_{cp},$$

где  $\tau_{\max}$  - максимальное касательное напряжение,  $M_{kp}^{\max}$  - максимальный внутренний крутящий момент (берется с эпюры  $M_{kp}$  по модулю),

$W_p = \frac{\pi * d^3}{16}$  - полярный момент сопротивления,  $R_{cp}$  - расчетное сопротивление при кручении.

Откуда:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 * M_{kp}^{\max}}{\pi * R_{cp}}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 1062,5}{3,14 * 80 * 10^6}} = 4,075 * 10^{-2} \text{ м}$$

Принимаем диаметр вала  $d = 45 \text{ мм} = 4,5 \text{ см}$

IV. Построение эпюры углов закручивания начинаем от опоры и строим нарастающим итогом. Предварительно посчитаем жесткость вала:

$$G * I_p = 0,8 * 10^{11} * \frac{3,14 * 4,5^4}{32} * 10^{-8} = 32,2 * 10^3 \text{ Н * м}^2$$

Угол закручивания в левой опоре:  $\varphi_A = 0$

$$\varphi_B = \varphi_{IV} = \frac{M_{kIV} * a}{G * I_p} = \frac{-562,5 * 1,2}{32,2 * 10^3} = -20,9 * 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\varphi_B = \varphi_{IV} + \varphi_{III} = \varphi_B + \frac{M_{kIII} * b}{G * I_p} = \varphi_B + \frac{437,5 * 1,4}{32,2 * 10^3} = -20,9 * 10^{-3} + 19,02 * 10^{-3} = -1,88 * 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\varphi_{\Gamma} = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} = \varphi_B + \frac{M_{kII} * c}{G * I_p} = -1,88 * 10^{-3} - \frac{1062,5 * 1}{32,2 * 10^3} = -34,88 * 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\varphi_D = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} + \varphi_I = \varphi_{\Gamma} + \frac{M_{kI} * a}{G * I_p} = -34,88 * 10^{-3} + \frac{937,5 * 1,2}{32,2 * 10^3} = 0$$

В последней точке угол закручивания должен получиться равным нулю (по условию задачи). Эпюра углов закручивания показана на рис.5.1

V. Наибольший относительный угол закручивания определяется по формуле:

$$\theta_{\max} = \frac{M_k^{\max}}{G I_p} = \frac{1062,5}{32,2 * 10^3} = 32,99 * 10^{-3} \text{ рад/м}$$

Полученный результат переведем в градусы на метр длины:

$$\theta_{\max} = 32,99 \cdot 10^{-3} \frac{180^\circ}{\pi} = 1,9 \text{ град} / \text{м}$$

**Пример 6:** К стальному валу, защемленному с двух сторон (рис.5.2), приложены два известных момента:  $M_1=5\text{кНм}$ ,  $M_2=10\text{кНм}$ . Длина участков вала  $\ell=1\text{м}$ , допускаемые напряжения  $[\tau]=100\text{МПа}$ , модуль сдвига материала  $G=8 \cdot 10^{10}\text{Па}$

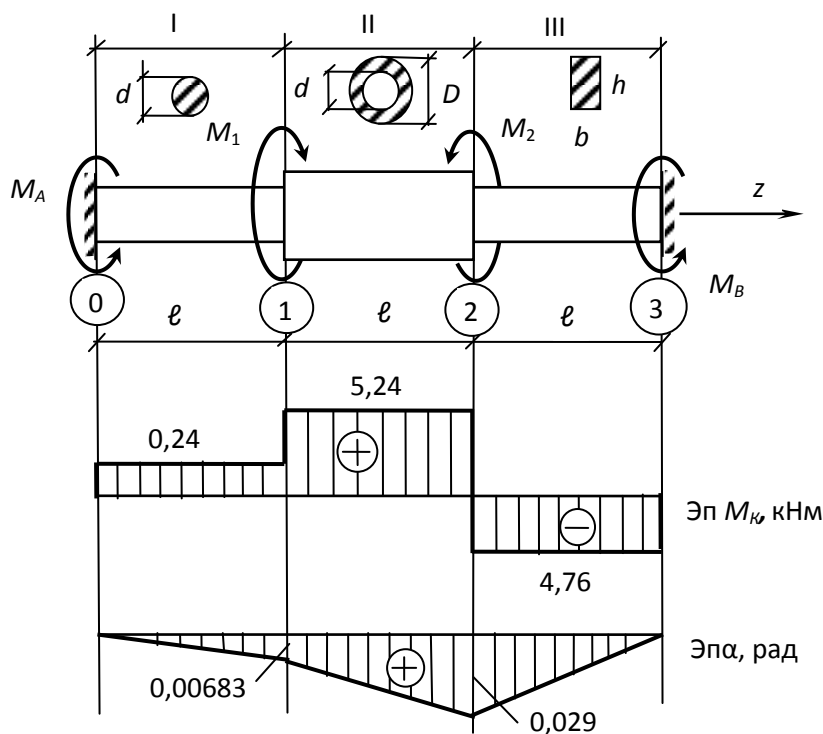


Рис.5.2

**Решение:**

1) Сначала составляем уравнение статики для всего бруса:

$$\sum M(z) = M_A - M_1 + M_2 + M_B = 0. \quad (1)$$

Здесь два неизвестных, следовательно, требуется еще одно уравнение. Его получим, если сформулируем условие совместности деформаций всех трех участков бруса. Оно заключается в том, что поворот правого опорного сечения относительно левого опорного сечения для рассматриваемого бруса невозможен, поскольку оба его концы жестко защемлены:

$$\phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} = 0.$$

$$\text{Учитывая, что } \phi_I = \frac{M_K^I \cdot \ell}{G \cdot I_\rho^I}, \quad \phi_{II} = \frac{M_K^{II} \cdot \ell}{G \cdot I_\rho^{II}}, \quad \phi_{III} = \frac{M_K^{III} \cdot \ell}{G \cdot I_\rho^{III}},$$

**Требуется:**

1) Построить эпюру крутящих моментов и подобрать размеры поперечных сечений заданной формы, соблюдая следующие соотношения между

$$\text{ними: } d=c, \quad k = \frac{d}{D} = 0,6,$$

$$\text{тогда } D = \frac{d}{k} = \frac{c}{0,6}, \quad b=c,$$

$$\frac{h}{b} = 2.$$

2) Построить эпюру углов поворота.

получаем: 
$$\frac{M_K^I \cdot \ell}{G \cdot I_\rho^I} + \frac{M_K^{II} \cdot \ell}{G \cdot I_\rho^{II}} + \frac{M_K^{III} \cdot \ell}{G \cdot I_K^{III}} = 0. \quad (2)$$

Сократим на  $\frac{\ell}{G}$ , тогда будет: 
$$\frac{M_K^I}{I_\rho^I} + \frac{M_K^{II}}{I_\rho^{II}} + \frac{M_K^{III}}{I_K^{III}} = 0 \quad (2')$$

Выразим моменты инерции сечений разных форм с учетом заданных соотношений размеров:

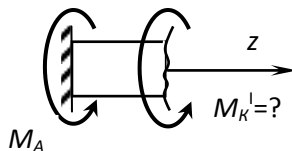
$$\begin{aligned} I_\rho^I &= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi c^4}{32}; \quad I_\rho^{II} = \frac{\pi D^4}{32} [1 - k^4] = \frac{\pi \left(\frac{d}{k}\right)^4}{32} [1 - k^4] = \frac{\pi \left(\frac{c}{k}\right)^4}{32} [1 - k^4] = \\ &= \frac{\pi c^4}{32 k^4} [1 - k^4] = \frac{\pi c^4}{32 \cdot 0,6^4} [1 - (0,6)^4] = \frac{\pi c^4}{32} \cdot 6,716, \end{aligned}$$

При  $h/b=2$ :  $\beta=0,229$ , и тогда  $I_K^{III} = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,229 \cdot (2b) \cdot b^3 = 0,458 \cdot b^4 = 0,458 \cdot c^4$ .

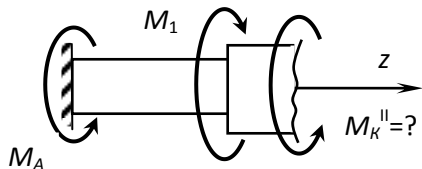
Итак, все моменты инерции выражены через один параметр  $c$ , что позволит довести до числа решение уравнения (2'):

$$\begin{aligned} \frac{M_K^I \cdot 32}{\pi \cdot c^4} + \frac{M_K^{II} \cdot 32}{\pi \cdot c^4 \cdot 6,716} + \frac{M_K^{III}}{0,458 \cdot c^4} &= 0, \text{ или после сокращения на } c^4: \\ \frac{32}{\pi} M_K^I + \frac{32}{\pi \cdot 6,716} M_K^{II} + \frac{1}{0,458} M_K^{III} &= 0. \end{aligned} \quad (2'')$$

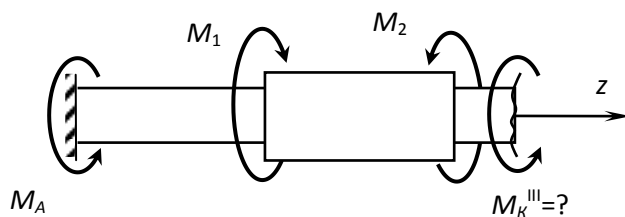
С помощью метода сечений выразим неизвестные крутящие моменты через один из реактивных опорных моментов, например, через  $M_A$ :



$$\begin{aligned} \sum M(z) &= M_K^I + M_A = 0, \\ M_K^I &= -M_A. \end{aligned} \quad (a)$$



$$\begin{aligned} \sum M(z) &= M_K^{II} + M_A - M_1 = 0, \\ M_K^{II} &= -M_A + M_1 = -M_A + 5. \end{aligned} \quad (б)$$



$$\sum M(z) = M_{\kappa}^{\text{III}} + M_A - M_1 + M_2 = 0,$$

$$M_{\kappa}^{\text{III}} = -M_A + M_1 - M_2 = -M_A + 5 - 10 = -M_A - 5. \quad (\text{в})$$

С учетом (а), (б) и (в) уравнение (2''), будет:

$$\frac{32}{\pi}(-M_A) + \frac{32}{\pi \cdot 6,716}(-M_A + 5) + \frac{1}{0,458}(-M_A - 5) = 0$$

откуда находим значение  $M_A$ :

$$-M_A \left( \frac{32}{\pi} + \frac{32}{\pi \cdot 6,716} + \frac{1}{0,458} \right) = -\frac{32}{\pi \cdot 6,716} \cdot 5 + \frac{1}{0,458} \cdot 5,$$

$$-13,892M_A = 3,33. \quad M_A = -0,24 \text{ кНм}$$

Из (а), (б) и (в) найдем:  $M_{\kappa}^{\text{I}} = -(-0,24) = 0,24 \text{ кНм},$

$$M_{\kappa}^{\text{II}} = -(-0,24) + 5 = 5,24 \text{ кНм}, \quad M_{\kappa}^{\text{III}} = -(-0,24) - 5 = -4,76 \text{ кНм},$$

Эти результаты показаны в виде эпюры крутящих моментов.

Подбор размеров сечений производится по условиям прочности:

$$\text{- на первом участке: } \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\text{I}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

$$\text{Для круглого сечения } W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{d/2}.$$

$$\text{При заданном соотношении } d=c: I_{\rho} = \frac{\pi c^4}{32}.$$

$$\text{Тогда } W_{\rho} = \frac{\pi c^3}{16}, \text{ и } c \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa}^{\text{I}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,24 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,023 \text{ м или } (2,3 \text{ см});$$

$$\text{- на втором участке: } \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\text{II}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

$$\text{Для кольцевого сечения } W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{D/2}. \quad \text{Здесь мы должны учесть}$$

соотношения размеров, при которых и найдены внутренние усилия, то – есть

$$I_{\rho}^{\text{II}} = \frac{\pi c^4}{32} \cdot 6,716, \text{ тогда: } W_{\rho} = \frac{\pi c^4}{16} \cdot 6,716 \cdot \frac{2 \cdot 0,6}{c} = \frac{\pi c^3}{3,97},$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{3,97 \cdot M_{\kappa}^{\text{II}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3,97 \cdot 5,24 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,04 \text{ м (или } 4 \text{ см)};$$

$$\text{- на третьем участке: } \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\text{III}}}{W_{\kappa}} \leq [\tau].$$

Для прямоугольного сечения  $W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2$ . При соотношениях  $\frac{h}{b} = 2$  и  $b=c$ :  $W_k = \alpha \cdot (2c) \cdot c^2 = 2\alpha \cdot c^3$ .

По таблице  $\alpha=0,246$ . И тогда  $W_k=2 \cdot 0,246 \cdot c^3$ .

Из условия прочности  $c \geq \sqrt[3]{\frac{M_k^{\text{II}}}{0,492[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{4,76 \cdot 10^3}{0,492 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,046 \text{ м (или 4,6 см)}$ .

Из трех требуемых значений «с» (0,023м, 0,04м и 0,046м) принимаем наибольшее  $c=0,046\text{м}$  и тогда проектные значения размеров сечений на разных участках должны быть

- на первом участке: круглое сечение диаметром  $d=0,046\text{м}$ ,

$$\text{у которого } I_{\rho}^I = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,046^4}{32} = 43,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

- на втором участке: кольцевое сечение с внутренним диаметром  $d=0,046\text{м}$ , а

$$\text{внешним } D = \frac{d}{k} = \frac{0,046}{0,6} = 0,0766 \text{ м},$$

$$\text{у которого } I_{\rho}^{\text{II}} = \frac{\pi D^4}{32} [1 - k^4] = \frac{3,14 \cdot 0,0766^4}{32} [1 - 0,6^4] = 295,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

- на третьем участке: прямоугольное сечение шириной  $b=c=0,046\text{м}$  и высотой  $h=2b=2 \cdot 0,046=0,092 \text{ м}$ , у которого  $I_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,229 \cdot 0,092 \cdot 0,046^3 = 205 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ .

## 2. Построение эпюры углов поворота.

Для этого вычисляются углы поворота сечений, расположенных на границах участков бруса (эти сечения на схеме обозначены цифрами в кружочках), они откладываются в виде ординат, вершины которых соединяются прямыми линиями. Так:

$\alpha_0=0$ , поскольку крайнее левое сечение жестко зашце́млено и поворачиваться вокруг продольной оси  $z$  не может,

$$\alpha_1 = \varphi_I = \frac{M_k^I \cdot \ell}{G \cdot I_{\rho}^I} = \frac{0,24 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 43,9 \cdot 10^{-8}} = 0,00683 \text{ рад},$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi_{\text{II}} = \alpha_1 + \frac{M_k^{\text{II}} \cdot \ell}{G \cdot I_{\rho}^{\text{II}}} = 0,00683 + \frac{5,24 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 295,4 \cdot 10^{-8}} = 0,00683 + 0,022 = 0,029 \text{ рад},$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \varphi_{\text{III}} = \alpha_2 + \frac{M_k^{\text{III}} \cdot \ell}{G \cdot I_k} = 0,03156 + \frac{(-4,76 \cdot 10^3) \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 205 \cdot 10^{-8}} = 0,029 - 0,029 = 0.$$

Равенство нулю угла поворота крайнего правого сечения, тоже жестко зашце́мленного, служит контролем правильности всего решения задачи.

## 6. Плоский поперечный изгиб

Изгибом называется деформация, при которой ось стержня и все его волокна, т. е. продольные линии, параллельные оси стержня, искривляются под действием внешних сил. Наиболее простой случай изгиба получается тогда, когда внешние силы будут лежать в плоскости, проходящей через центральную ось стержня, и не дадут проекций на эту ось. Такой случай изгиба называют плоским изгибом.

Работающий на изгиб стержень обычно называют балкой. Балка при изгибе опирается на опоры, расстояние между которыми называют пролетом. Опорные закрепления в балках могут быть различными. В инженерных расчетах обычно применяют два основных вида закреплений. Балка опирается на шарнирное закрепление и защемление (жесткая заделка).

В шарнирно-неподвижной опоре возникают две реакции: вертикальная  $R$  и горизонтальная  $H$ . В шарнирно-подвижной – одна вертикальная реакция  $R$ . В защемлении возникают три реакции: вертикальная реакция  $R$ , горизонтальная реакция  $H$  и изгибающий момент  $M$ . Для определения опорных реакций необходимо воспользоваться приемами, известными из курса теоретической механики.

После определения опорных реакций все внешние силы, действующие на балку, оказываются известными и можно перейти к определению внутренних сил, возникающих в любом сечении балки.

Поперечная сила в каком-либо сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $y$  всех сил (включая опорные реакции), расположенных по одну сторону (любую) от проведенного сечения.

Изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех сил (включая и опорные реакции), расположенных по одну сторону (любую) от проведенного сечения относительно центра тяжести этого сечения.

Сила  $Q$  представляет равнодействующую распределенных по сечению внутренних касательных напряжений, а момент  $M$  – сумму моментов вокруг центральной оси сечения  $X$  внутренних нормальных напряжений.

Поперечная сила считается положительной, если она вращает выделенный элемент по часовой стрелке. Изгибающий момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна балки.

### **Контроль построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов**

1) В тех местах, где действует сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил имеется скачок на величину этой силы, а на эпюре изгибающих моментов – излом.

2) В тех местах, где действует момент  $M$ , на эпюре моментов будет скачок на величину этого момента, а на эпюре поперечных сил это не отражается.

3) В тех местах, где действует постоянная распределенная нагрузка, эпюра изгибающих моментов ограничена квадратной параболой, а эпюра поперечных сил – наклонной линией.

4) В тех местах, где эпюра поперечных сил плавно (без скачков) меняет знак с плюса на минус или, наоборот, на эпюре моментов будет экстремум.

5) В том случае, когда равномерно распределенная нагрузка направлена вниз, выпуклость кривой, ограничивающей эпюру изгибающего момента, направлена вниз – по направлению действия распределенной нагрузки и эпюра  $M$  строится на растянутом волокне. При обратном направлении нагрузки (вверх) выпуклость кривой тоже имеет обратное направление.

6) На тех участках балки, где эпюра  $Q$  положительна, изгибающий момент с увеличением координаты  $z$  увеличивается, и, наоборот, там, где  $Q < 0$ , изгибающий момент уменьшается.

7) На участках, где  $Q = 0$ , изгибающий момент имеет постоянное значение.

При изгибе возникают нормальные и касательные напряжения, определяемые по формулам:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^0}{I_x \cdot b} \quad (6.1)$$

где  $M_x$  – изгибающий момент в сечении,  $I_x$  – момент инерции всего поперечного сечения,  $y$  – расстояние по вертикали до волокна, где определяется напряжение,  $Q$  – поперечная сила в сечении,  $S_x^0$  – статический момент части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от слоя, в котором определяются касательные напряжения,  $b$  – ширина сечения в том месте, где определяется касательное напряжение.

Отношение :  $I_x / y_{\max} = W_x$  (6.2)  
называют моментом сопротивления. Его размерность  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ . Момент сопротивления характеризует влияние формы и размеров поперечного сечения на величину напряжений.

$$\text{Максимальные напряжения: } \sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \quad (6.3)$$

$$\text{Условие прочности при изгибе: } \sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq R. \quad (6.4)$$

Максимальный изгибающий момент, как правило, определяется по эпюре изгибающих моментов.

**Пример 7.** Для заданных двух схем балок (рис.6.1 и 6.2) требуется

- написать выражения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  для каждого участка в общем виде,
- построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{\max}$

- сделать проектировочный расчет.

**Решение:**

**Схема а)**

1.Определение реакций: реакции определяем из уравнений статики – уравнений равновесия. Предварительно показываем стрелочками искомые реакции. При жесткой заделке балки возникает три составляющие реакций: горизонтальная, вертикальная и момент.

**Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $z$ :**  $\sum z = 0$  ,  $H_A = 0$

**Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $y$ :**  $\sum y = 0$

Равномерно распределенную нагрузку превращаем в равнодействующую силу, умножая на длину участка, по которому она действует. Сосредоточенный момент на оси не проецируется.

$$R_A - q(a + b) = 0 \Rightarrow R_A = 10 \cdot 10^3 \cdot 11 = 110 \text{ кН}$$

**Сумма моментов относительно опорной точки  $A$ :**  $\sum M_A = 0$

Момент- это сила, умноженная на плечо (расстояние от силы до точки, вокруг которой записываем момент). У распределенной нагрузки плечом будет являться расстояние от равнодействующей (середина нагруженного участка) до точки, вокруг которой записывается момент.

$$M_A - M - q(a + b) \frac{(a + b)}{2} = 0 \Rightarrow M_A = M + q(a + b) \frac{(a + b)}{2} = 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 55 \text{ кНм}.$$

Записываем уравнения  $Q$  и  $M$  для каждого из участков в общем виде, при этом учитываем знаки.

$Q$ - поперечная сила, считается положительной, если вращает выделенный элемент по часовой стрелке. Она равна алгебраической сумме проекций на вертикальную ось всех внешних сил и реакций, расположенных по одну сторону от проведенного сечения с учетом знака.

$M$ - изгибающий момент, считается положительным, если растягивает нижние волокна. Он равен алгебраической сумме моментов вокруг центра проведенного сечения всех внешних сил и реакций, расположенных по одну сторону от сечения с учетом знака.

1)Первый участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие правой отсеченной части:  $0 \leq z_1 \leq 3$

$$Q_1 = 0 , \quad M_1 = 0$$

2)Второй участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие правой отсеченной части:  $0 \leq z_2 \leq 2$  ,  $Q_2 = q \cdot z_2$  ,  $M_2 = -q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}$  ,

В аналитическое выражение вместо переменной подставляем границы участка:  $Q_2(0) = 0$  ;  $Q_2(2) = 10 \cdot 10^3 \cdot 2 = 20 \text{ кН}$

$$M_2(0) = 0; \quad M_2(2) = -10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кНм}$$

3) Третий участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие правой отсеченной части:  $0 \leq z \leq 1$

$$Q_3 = q(b + z_3), \quad Q_3(0) = q \cdot b = 10 \cdot 10^3 \cdot 2 = 20 \text{ кН}; \quad Q_3(1) = 10 \cdot 10^3 \cdot 3 = 30 \text{ кН}$$

$$M_3 = -q \cdot (b + z_3) \cdot \frac{(b + z_3)}{2} - M,$$

$$M_3(0) = -q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - M = -10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 10^3 = -30 \text{ кНм}$$

$$M_3(1) = -10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10 \cdot 10^3 = -55 \text{ кНм}.$$

На участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра поперечных сил  $Q$  представляет собой горизонтальную прямую, а эпюра изгибающего момента  $M$  — наклонную прямую. На участках, где есть распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил  $Q$  представляет собой наклонную прямую, а эпюра изгибающего момента  $M$  — параболу, выпуклостью по направлению нагрузки (правило паруса).

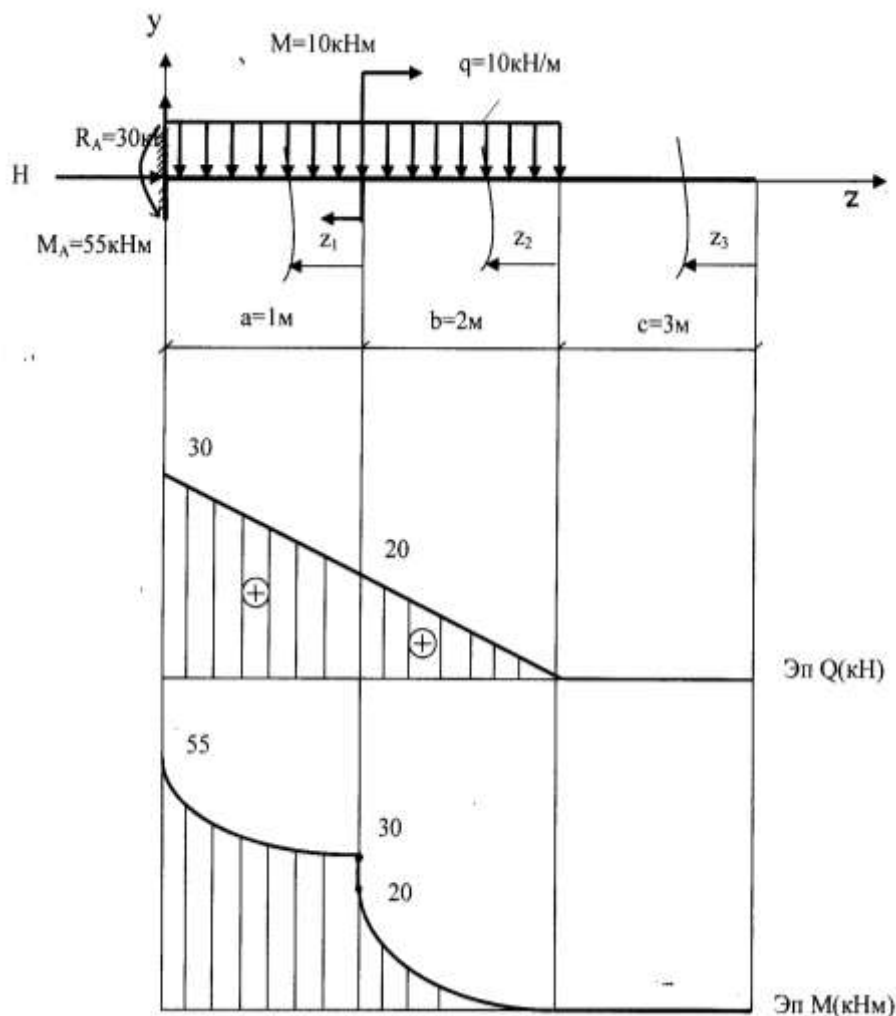


Рис.6.1(Схема а)

Ординаты эпюры моментов у студентов строительных специальностей принято откладывать со стороны растянутых волокон (знак «-» вверх, «+» вниз).

3.Проектировочный расчет, то есть подбор размеров поперечного сечения.

Подобрать деревянную балку круглого поперечного сечения при расчетном сопротивлении  $R_u=10$  МПа (материал – дерево).

Используем условие прочности при изгибе:  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R_u$ .

С эпюры изгибающих моментов берем максимальный момент  $M_{\max} = |-55 \text{ кНм}|$ , из условия прочности выражаем момент сопротивления  $W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}$ , который для круглого поперечного сечения определяется по

$$\text{формуле: } W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot R}}$$

$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 55 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,4122 \text{ м} = 41,22 \text{ см}$  - диаметр поперечного сечения деревянной балки.

### Схема б)

1.Определение реакций: реакции определяем из уравнений статики – уравнений равновесия. Предварительно показываем стрелочками искомые реакции. При шарнирном закреплении балки возникает три составляющие реакций: в шарнирно неподвижной опоре (опора А): горизонтальная, равная нулю и вертикальная реакция, при шарнирно подвижной опоре - вертикальная реакция.

Сумма моментов относительно опор:

$$\text{Опора А: } \sum M_A = 0 \quad F \cdot a + R_B \cdot (b + c) - q \cdot c \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8R_B = -10 \cdot 10^3 \cdot 3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 6,5 \Rightarrow R_B = 20,625 \text{ кН}$$

$$\text{Опора В: } \sum M_B = 0 \quad F \cdot (a + b + c) - R_B \cdot (b + c) + q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8R_B = 10 \cdot 10^3 \cdot 11 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5 \Rightarrow R_B = 19,375 \text{ кН}$$

Делаем проверку найденных реакций.

Сумма проекций всех сил на ось Y:  $\sum Y = 0$ ,  $R_A - F - q \cdot c + R_B = 0$

$$19,375 - 10 \cdot -10 \cdot 3 + 20,625 = 0, \quad 0=0$$

2.Записываем уравнения Q и M для каждого из участков в общем виде, при этом учитываем знаки.

1) Первый участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие левой отсеченной части:  $0 \leq z_1 \leq 3$

$$Q_1 = -F \quad Q_1(0) = Q_1(3) = -F = -10 \text{ кН} \quad M_1 = -F \cdot z_1 \quad M_1(0) = 0 \quad M_1(3) = -30 \text{ кНм}$$

2) Второй участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие левой отсеченной части:  $0 \leq z_2 \leq 5$

$$Q_1 = -F + R_A, \quad Q_1(0) = Q_1(5) = -F + R_A = 9,375 \text{ кН}$$

$$M_2 = -F \cdot (a + z_2) + R_A \cdot z_2$$

$$M_2(0) = -F \cdot 3 = -30 \text{ кНм}; \quad M_2(5) = -10 \cdot 10^3 \cdot 8 + 19,375 \cdot 10^3 \cdot 5 = 16,875 \text{ кНм}$$

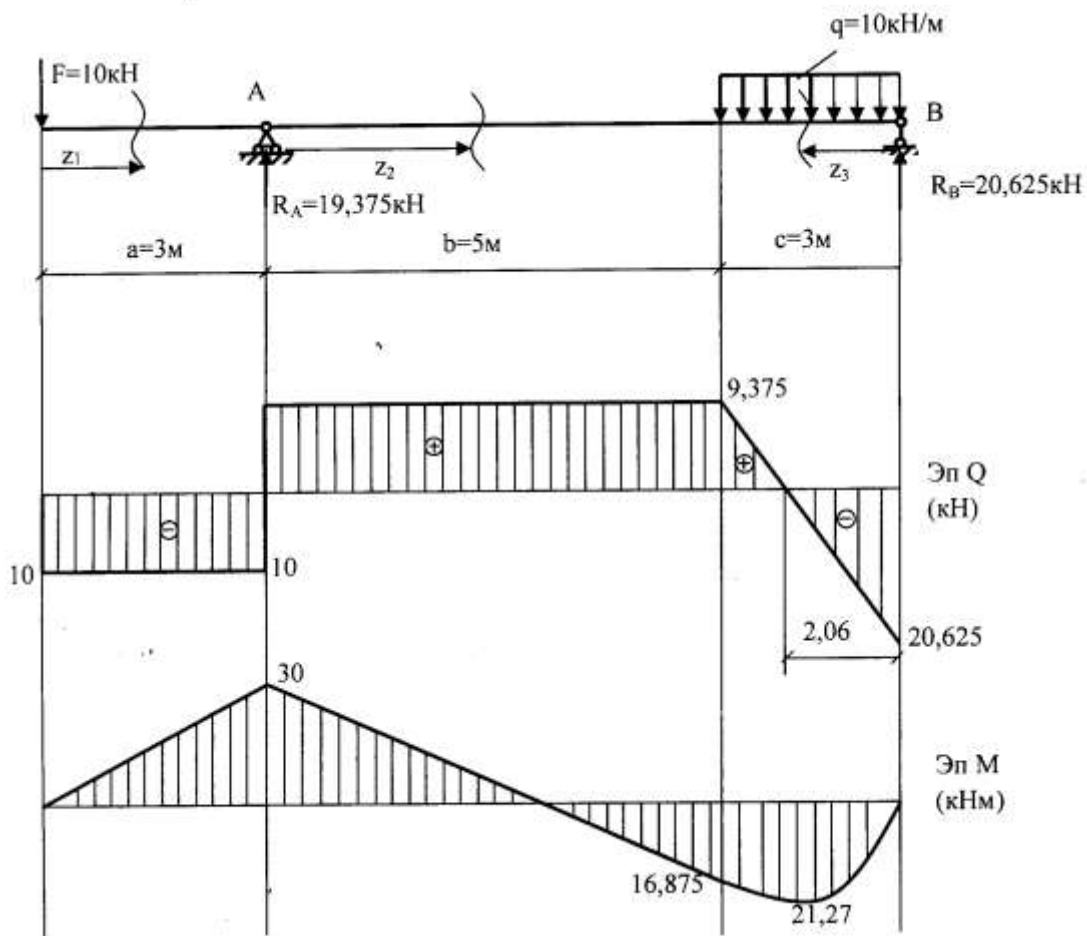


Рис.6.2 (Схема б)

3) Третий участок: проводим на участке сечение и рассматриваем равновесие правой отсеченной части:  $0 \leq z_3 \leq 3$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot z_3$$

$$Q_3(0) = -R_B = -20,625 \text{ кН}; \quad Q_3(3) = -20,625 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 3 = 9,375 \text{ кН}$$

Если эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию, то в этой точке на эпюре моментов будет вершина параболы (максимальное значение). Поэтому эту точку нужно обязательно определить. Приравняем выражение для поперечной силы к нулю  $Q_3 = 0$ , и отсюда определяем расстояние  $z_3 = 2,06$  м.

$$M_3 = R_B \cdot z_3 - q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2}, \quad M_3(0) = 0;$$

$$M_3(2,06) = 20,625 \cdot 10^3 \cdot 2,06 - 10 \cdot 10^3 \cdot 2,06 \cdot 1,03 = 21,27 \text{ кНм}$$

$$M_3(3) = 20,625 \cdot 10^3 \cdot 3 - 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 16,875 \text{ кНм}$$

3.Проектировочный расчет, то есть подбор размеров поперечного сечения.

Подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения при расчетном сопротивлении  $R=160$  МПа:

$$\text{Используем условие прочности при изгибе: } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R_u$$

С эпюры берем максимальный момент  $M_{\max} = 30$  кНм

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{30 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,1875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 187,5 \text{ см}^3$$

По сортаменту (смотри приложение 2) подбираем двутавр с ближайшим большим значением момента сопротивления  $W_x$ .

Двутавр можно взять чуть меньше, при условии, что перенапряжение составляет меньше 5%: Например, принимаем двутавр № 20 с  $W_x = 184 \text{ см}^3$

$$\text{Считаем напряжение } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{30 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 163 \text{ МПа, и перенапряжение}$$

$$\text{составляет } \Delta = \frac{163-160}{160} \cdot 100\% = 1,9 < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

**Пример 8.** Для заданной схемы балки (рис.6.3) требуется

- написать выражения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  для каждого участка в общем виде,
- построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{\max}$
- сделать проектировочный расчет.

Дано:  $F = 10$  кН,  $q = 4$  кН/м,  $l_2 = 10a = 8$  м,  $a_1 = 2a$ ,  $a_2 = 7a$ ,  $a_3 = 3a$ ,  $R_u = 200$  МПа  
 $a = 0,8$  м;  $3a = 2,4$  м;  $2a = 1,6$  м;  $a = 5,6$  м.

**Решение**

1.Определение реакций: реакции определяем из уравнений статики – уравнений равновесия. Предварительно показываем стрелочками искомые реакции. При шарнирном закреплении балки возникает три составляющие реакций: в шарнирно неподвижной опоре (опора А): горизонтальная, равная

нулю и вертикальная реакция, при шарнирно подвижной опоре - вертикальная реакция.

Сумма моментов относительно опор:

$$\sum M_A = 0; q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} - F \cdot 2a - q \cdot 7a \cdot 6.5a + R_B \cdot 10a = 0$$

$$18 \cdot 0.64 - 16 - 28 \cdot 6.5 \cdot 0.64 + 8R_B = 0 \rightarrow R_B = 15.12 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; q \cdot 7a \cdot \frac{7a}{2} + F \cdot 8a - q \cdot 3a \cdot 11.5a - R_A \cdot 10a = 0 \rightarrow R_A = 26.88 \text{ кН} :$$

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - F - 10 \cdot q \cdot a = 0$$

$$15.12 + 26.88 - 10 - 10 \cdot 4 \cdot 0.8 = 0$$

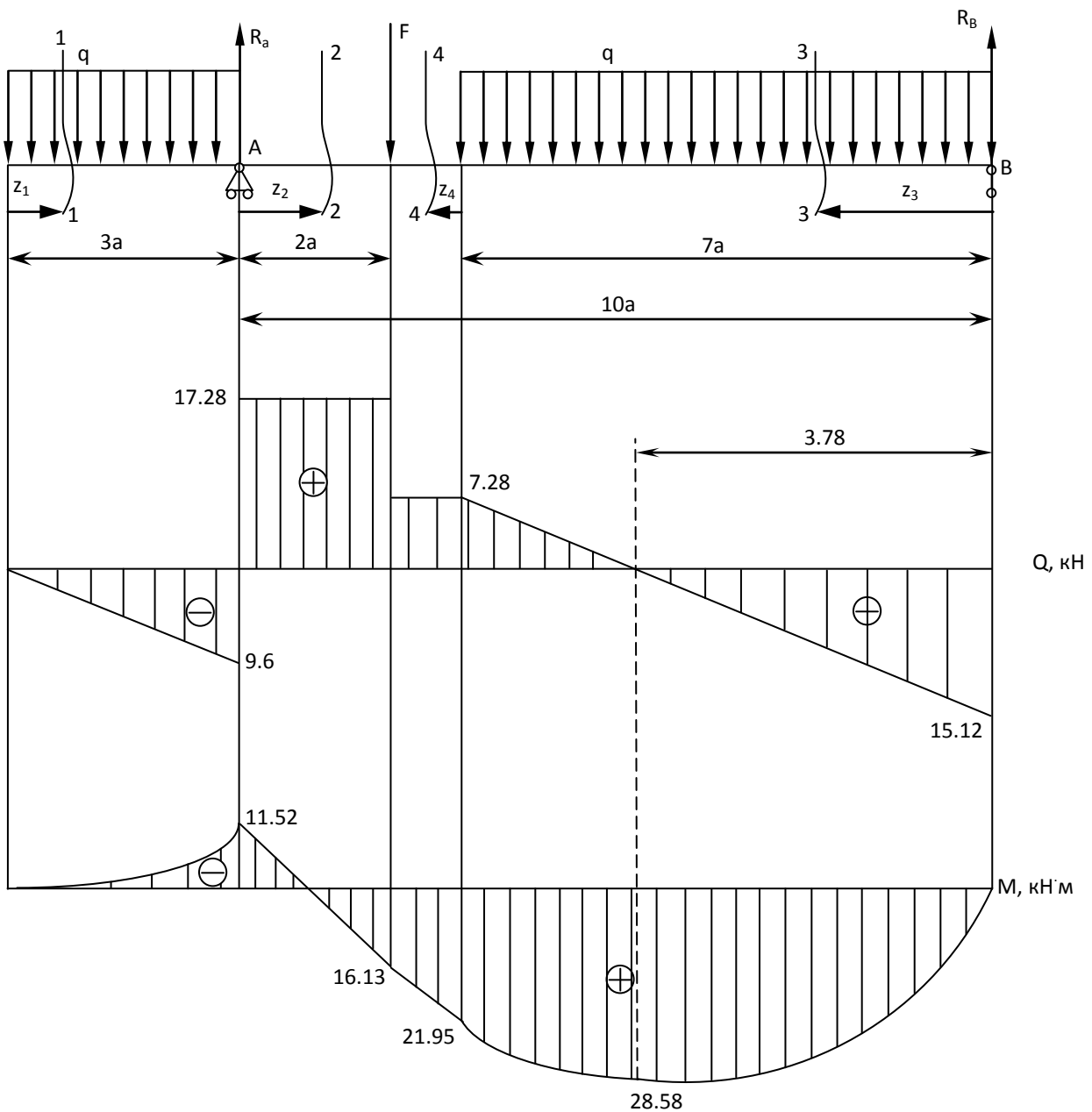


Рис.6.3

2. Разбиваем балку на участки, проводим сечения, определяем Q, M.

Сечение 1-1;  $0 \leq z_1 \leq 2.4 \text{ м}$

$$Q_1 = -q \cdot z_1; Q_1(0) = 0; Q_1(2.4) = -9.6 \text{ кН}$$

$$M_1 = -q \cdot \frac{z_1^2}{2}; M_1(0) = 0; M_1(2.4) = -11.52 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Сечение 2-2;  $0 \leq z_2 \leq 1.6 \text{ м}$

$$Q_2 = R_A - q \cdot 3a = 17.28 \text{ кН}$$

$$M_2 = -q \cdot 3a(1.5 + z_2) + R_A \cdot z_2; M_2(0) = -11.52 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2(1.6) = 16.128 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Сечение 3-3;  $0 \leq z_3 \leq 5.6 \text{ м}$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot z_3; Q_3(0) = -15.12 \text{ кН}; Q_3(5.6) = 7.28 \text{ кН}$$

$$M_3 = R_B \cdot z_3 - q \cdot \frac{z_3^2}{2}; M_3(0) = 0; M_3(5.6) = 21.95 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_3 = 0 \text{ при } z_3 = \frac{R_B}{q} = 3.78 \text{ м (точка экстремума M)}$$

$$M(3.78) = 28.58 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Сечение 4-4;  $0 \leq z_4 \leq 0.8 \text{ м}$

$$Q_4 = -R_B + q \cdot 7a = 7.28 \text{ кН}$$

$$M_4 = R_B(5.6 + z_4) - q \cdot 7a(3.5 + z_3); M_4(0) = 21.95 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_4(0.8) = 16.13 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным строим эпюры Q и M.

3.Проектировочный расчет, то есть подбор размеров поперечного сечения.

Подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения при расчетном сопротивлении  $R=200 \text{ МПа}$ :

$$\text{Используем условие прочности при изгибе: } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R_u$$

$$\text{С эпюры берем максимальный момент } M_{\max} = 25.58 \text{ кНм}$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R_u} = \frac{25.58 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 0.128 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 128 \text{ см}^3$$

По сортаменту (смотри приложение 2) подбираем двутавр с ближайшим большим значением момента сопротивления  $W_x$ .

Принимаем двутавр №18 ( $W_x = 143 \text{ см}^3$ ).

## 7. Внецентренное растяжение и сжатие

На практике элементы конструкций и сооружений подвергаются действию сил, вызывающих одновременно несколько простых деформаций. Такие случаи работы элементов конструкций называются сложным сопротивлением.

При расчётах на сложное сопротивление обычно используется принцип независимости действия сил, что значительно упрощает решение задач сложного сопротивления.

Рассмотрим важный частный случай изгиба с растяжением или сжатием, когда равнодействующая внешних сил  $F$  не совпадает с центральной осью  $z$  стержня, а действует параллельно этой оси. Такой случай деформации называется внецентренным растяжением или сжатием. В сечении стержня возникают три внутренних усилия: нормальная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ .

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения или сжатия необходимо знать положение главных центральных осей сечения; именно от этих осей отсчитывают координаты точки приложения силы и точки, в которой определяют напряжения (см. п.4).

Действующие в точках сечения нормальные напряжения вычисляются следующим образом

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right), \quad (7.1)$$

где  $y_F, x_F$  – координаты точки приложения внецентренной силы в системе главных осей;  $y, x$  – координаты произвольной точки сечения, перед множителем  $(F/A)$  ставится знак «+», если сила  $F$  растягивающая, и знак «-», если сила  $F$  сжимающая; координаты  $y_F, x_F, y, x$  имеют знаки, соответствующие выбранной системе координат.

$i_x^2 = I_x / A, \quad i_y^2 = I_y / A$ , здесь:  $i_x, i_y$  – радиусы инерции сечения;

Поперечное сечение делится на две зоны: растяжения и сжатия (рис.7.1). Линия, разделяющая эти две зоны, называется нейтральной (или нулевой). Напряжения в любой точке нулевой линии равны нулю. Положение нейтральной линии определяется координатами на осях сечения

$$x_0 = -i_y^2 / x_F, \quad y_0 = -i_x^2 / y_F. \quad (7.2)$$

Опасными являются точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии в зоне растяжения и в зоне сжатия, по напряжениям в этих точках оценивают прочность конструкции.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \left[ \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right) \right]_{\max} \leq R_c (R_p). \quad (7.3)$$

Из формул (7.2) видно, что с уменьшением координаты  $y_F$  и  $x_F$ , расстояния  $a_y$  и  $a_x$  увеличиваются, то есть точки пересечения нейтральной линии с осями координат удаляются от центра.

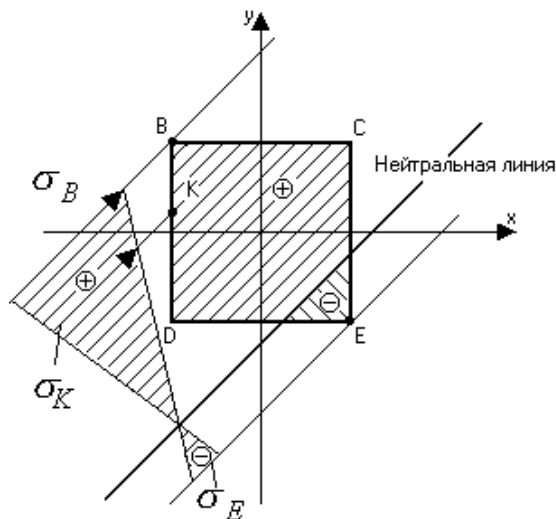


Рис. 7.1

При некоторых значениях  $y_F$  и  $x_F$  нейтральная линия окажется за пределами сечения, тогда во всём сечении напряжения будут иметь один знак.

Хрупкие материалы, как известно, плохо работают на растяжение. Между тем, части сооружений подвергаются действию сжимающей нагрузки, нередко их делают из хрупких материалов. Для того, чтобы и при внецентренном приложении сжимающей нагрузки в

материале не возникало растягивающих

напряжений, нужно ограничить величину эксцентриситета нагрузки, не выводить точку приложения за пределы некоторой области в сечении.

Область, расположенная вокруг центра сечения, в пределах которой должна находиться точка приложения продольной сжимающей или растягивающей силы, чтобы напряжения в сечении были одного знака, называется **ядром сечения**. Ядро сечения определяется координатами

$$x_F = -i_y^2 / x_0, \quad y_F = -i_x^2 / y_0, \quad (7.4)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты точек, принадлежащих касательным к контуру поперечного сечения.

**Пример 9. Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 7.2, сжимается силой  $F$ , приложенной в точке  $A$ . Требуется найти допускаемую силу  $F$ .**

**Решение.**

1. Задачу начинаем решать с определения геометрических характеристик поперечного сечения (подробнее смотри задачу 3).

а) определяем центр тяжести всего сечения, для этого разбиваем наше сечение на простые фигуры и у каждой фигуры находим площадь поперечного сечения и моменты инерции относительно собственных осей (по формулам из справочника)

1. Полукруг:  $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 14,14 \text{ см}^2$ ,  $I_x = \frac{\pi \cdot 3^4}{8} = 32,07 \text{ см}^4$ ,  $I_y = \frac{\pi \cdot 3^4}{8} = 32,07 \text{ см}^4$

2. Прямоугольник:  $A_2 = 50 \text{ см}^2$ ,

$$I_x = \frac{b^3 h}{12} = \frac{10^3 \cdot 5}{12} = 416,67 \text{ см}^4, \quad I_y = \frac{h^3 b}{12} = \frac{5^3 \cdot 10}{12} = 104,17 \text{ см}^4$$

Координаты центра тяжести относительно вспомогательной оси  $y_0$ :

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{586 \cdot 2,1 + 50 \cdot 2,5}{586 + 50} = 2,1 \text{ см},$$

$$y_c = 0$$

б) определяем моменты инерции всей фигуры относительно центральных осей, используя формулы перехода между параллельными осями :

$$I_{x0} = I_{x1} + A_1 a_1^2 + I_{x2} + A_2 a_2^2 = 586 + 50 \cdot 2,1^2 + 104,17 + 50 \cdot 2,5^2 = 1041,17 \text{ см}^4$$

$$I_{y0} = I_{y1} + A_1 b_1^2 + I_{y2} + A_2 b_2^2 = 104,17 + 50 \cdot 2,6^2 + 416,67 + 50 \cdot 2^2 = 1041,17 \text{ см}^4$$

$$I_{x0} = I_{y0} = 1041,17 \text{ см}^4$$

Здесь:  $a_i$  – расстояния между центральной осью  $X$  и собственными осями  $X_i$  каждой фигуры,  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $Y$  и собственными осями  $Y_i$  (берется с «+», если отрезок выше или правее центральной оси, «-» - ниже или левее центральной оси)

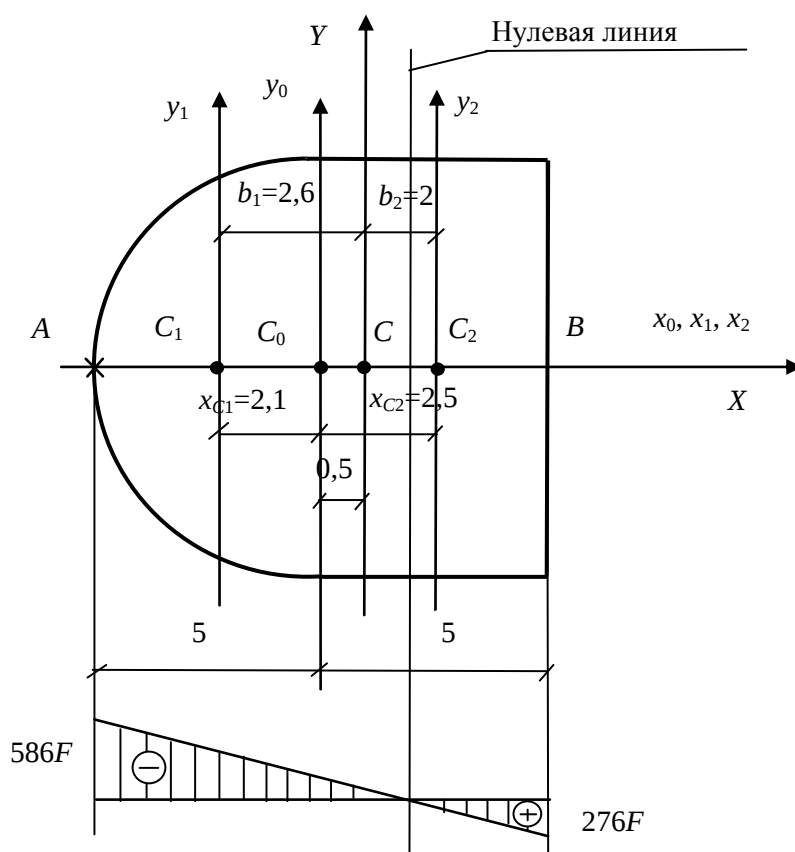


Рис.7.2

Центробежный момент инерции  $I_{xy} = 0 \Rightarrow$  значит оси  $X$ ;  $Y$  - являются главными.

в) определяем радиусы инерции по формулам:

$$i_x^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{6,38}{1,3250} = 4,81; \quad i_y^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{6,38}{1,3250} = 4,81.$$

2. Определение положения нулевой линии, которая делит поперечное сечение при деформации на две зоны: зону растяжения и зону сжатия.

Отрезки, которые отсекает нулевая линия на координатных осях, определяются по формулам:

$$x_F = \frac{i_y^2}{x_F} = \frac{4,81}{-5,5} = -0,87 \text{ см}, \quad y_F = \frac{i_x^2}{y_F} = \frac{4,81}{0} = \infty,$$

где:  $x_F = -5,5 \text{ см}$ ,  $y_F = 0 \text{ см}$  - координаты точки приложения силы в системе главных осей.

Точка приложения силы находится на оси  $X$ , следовательно, нулевая линия перпендикулярна оси  $X$  и находится по другую сторону от центра тяжести.

3. Построение эпюры напряжений, вычисление наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего напряжения в поперечном сечении определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_y^2} + \frac{x_F x}{i_x^2} \right), \text{ где}$$

$x_F; y_F$  - координаты точки приложения силы относительно главных осей;

$x; y$  - координаты точки, где нужно определить напряжение.

Если сила сжимающая, то в формуле знак «-», если растягивающая - «+». По условию задачи дана сжимающая сила.

При внецентренном сжатии для оценки прочности хрупкого материала необходимо найти напряжения в двух точках - наиболее удаленных от нулевой линии со стороны сжатия и со стороны растяжения. Точки  $A$  и  $B$  - опасные точки.

Напряжения, которые требуется найти, выразим через неизвестную силу  $F$ :

т.  $A (-5,5; 0)$

$$\sigma_A = \frac{52F}{8250}$$

т. В (4,5;0)



$$\sigma_B = \frac{24F}{8250}$$

4. Находим допускаемую нагрузку  $F$  из условия прочности:

Зона сжатия:  $\sigma = \frac{5 \cdot F}{8250} \leq \sigma_c$

$$\frac{5F}{8250} \leq 1 \text{ МПа} \Rightarrow F \leq \frac{1 \cdot 8250}{5} = 1650 \text{ кН.}$$

Зона растяжения:  $\sigma_B = \frac{24F}{8250} \leq \sigma_t$

$$\frac{24F}{8250} \leq 2 \text{ МПа} \Rightarrow F \leq \frac{2 \cdot 8250}{24} = 687,5 \text{ кН.}$$

За допускаемую нагрузку принимаем наименьшую из найденных сил, т.е. ответом к данной задаче будет сила равная 90,7 кН.

**Пример 10.** Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 7.3, сжимается силой  $F$ , приложенной в точке А.

Дано:  $a=3\text{см}$ ,  $b=2\text{см}$ ,  $R_c=130\text{МПа}$ ,  $R_p=27\text{МПа}$ .

**Требуется:**

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через силу  $F$ , и размеры сечения;

2) найти допускаемую нагрузку  $F$  при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях для чугуна на сжатие и на растяжение.

**Решение.**

1. Задачу начинаем решать с определения геометрических характеристик поперечного сечения (подробнее смотри задачу 3).

Определим площадь сечения:  $A = 3a \cdot 4b - a \cdot 3b = 10ab = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60\text{см}^2$ .

Момент инерции:

$$J_{x_c} = \frac{3a(4b)^3}{12} - \frac{a(2b)^3}{12} = 16ab^3 - 0,66ab^3 = 15,34ab^3 = 15,34 \cdot 3 \cdot 2^3 = 368\text{см}^4;$$

$$J_{y_c} = \frac{4b(3a)^3}{12} - \frac{2ba^3}{12} = 9ba^3 - 0,16ba^3 = 8,84ba^3 = 8,84 \cdot 2 \cdot 3^3 = 477\text{см}^4.$$

2. Определение положения нулевой линии, которая делит поперечное сечение при деформации на две зоны: зону растяжения и зону сжатия.

Используем условие:  $\frac{1}{F} + \frac{x_A \cdot x_0}{J_{y_c}} + \frac{y_A \cdot y_0}{J_{x_c}} = 0;$

Тогда, при  $x_A = -4,5$  см;  $y_A = 4$  см;

$$x_0 = -\frac{J_{y_c}}{A \cdot x_A} = -\frac{477}{60 \cdot (-4,5)} = 1,76 \text{ см}; \quad y_0 = -\frac{J_{x_c}}{A \cdot y_A} = -\frac{368}{60 \cdot 4} = 1,53 \text{ см}.$$

### 3. Вычисление наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего напряжения в поперечном сечении.

При внецентренном сжатии для оценки прочности хрупкого материала необходимо найти напряжения в двух точках - наиболее удаленных от нулевой линии со стороны сжатия и со стороны растяжения. Точки  $A$  и  $B$  – опасные точки, их координаты определяем в системе главных осей:

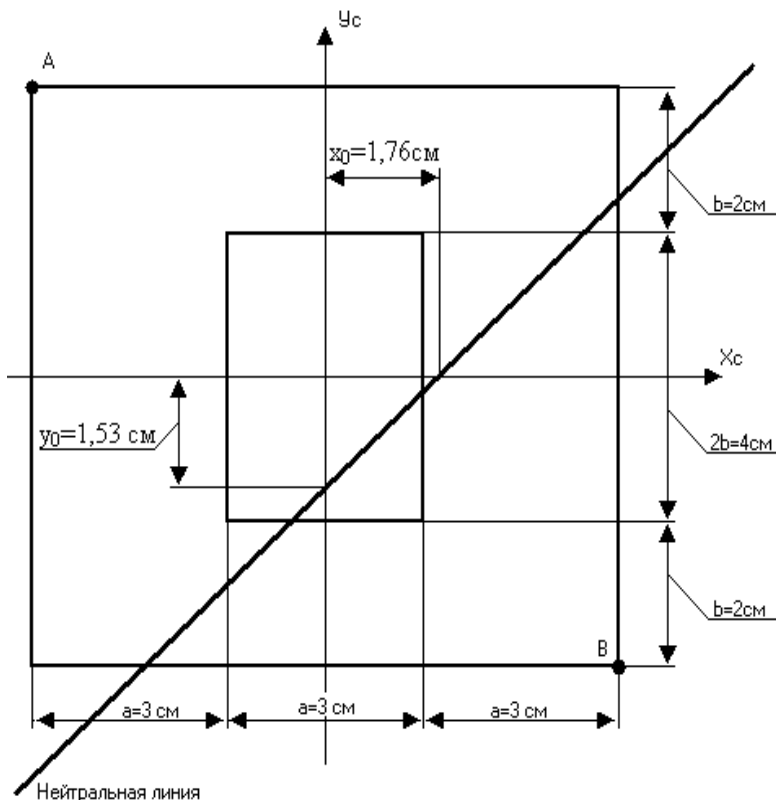
$$x_A = -4,5 \text{ см}; \quad y_A = 4 \text{ см}, \quad x_B = 4,5 \text{ см}; \quad y_B = -4 \text{ см};$$

Напряжения, которые требуется найти, выразим через силу  $F$ :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= F \left( \frac{1}{A} + \frac{x_A \cdot x_A}{J_{y_c}} + \frac{y_A \cdot y_A}{J_{x_c}} \right) = -F \cdot 10^4 \left[ \frac{1}{60} + \frac{(-4,5) \cdot (-4,5)}{477} + \frac{4 \cdot 4}{368} \right] = \\ &= -F \cdot 10^4 (0,016 + 0,042 + 0,043) = -1014F; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= F \left( \frac{1}{A} + \frac{x_A \cdot x_B}{J_{y_c}} + \frac{y_A \cdot y_B}{J_{x_c}} \right) = -F \cdot 10^4 \left[ \frac{1}{60} + \frac{(-4,5) \cdot 4,5}{477} + \frac{4 \cdot (-4)}{368} \right] = \\ &= -F \cdot 10^4 (0,016 + 0,042 - 0,043) = 690F. \end{aligned}$$

### 4. Находим допускаемую нагрузку $F$ из условия прочности:



Зона сжатия:

$$\sigma_A = |-1014F| \leq R_c$$

$$|-1014F| \leq 130 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{130 \cdot 10^6}{1014} = 128205 \text{ Н}.$$

Зона растяжения:

$$\sigma_B = 690F \leq R_p, \quad 690F \leq 27 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{27 \cdot 10^6}{690} = 39130 \text{ Н}.$$

За допускаемую нагрузку принимаем наименьшую из найденных сил, т.е. ответом к данной задаче будет сила равная 39130 Н.

Рис. 7.3 – Схема к расчету

## 8. Совместное действие изгиба и кручения

В сечении стержня при изгибе с кручением могут действовать пять внутренних усилий: поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , крутящий момент  $M_k$ . Методика построения эпюр перечисленных внутренних усилий рассмотрена выше.

Последовательность выполнения расчета на прочность: построение эпюр внутренних усилий; определение сечений, относящихся к категории опасных; определение положения опасных точек в сечении (в сечениях); расчет на прочность с использованием теорий прочности.

Строятся эпюры изгибающих моментов от сил, лежащих в горизонтальной  $M_H$  и вертикальной  $M_B$  плоскостях и суммарный изгибающий момент  $M_c$  (рис. 11.2) находится по формуле:

$$M_c = \sqrt{M_H^2 + M_B^2} \quad (8.1)$$

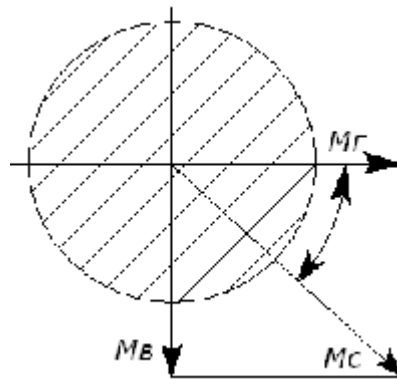


Рис. 8.1 – Схема действующих моментов

Определяется расчетный (эквивалентный) момент по одной из теорий прочности.

При расчетах конструкций, изготовленных из конструкционных сталей, используются третья и четвертая теории прочности, согласно которым расчетные (эквивалентные) напряжения  $\sigma_p$  определяются так:

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (a)$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (б)$$

где напряжения нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  рассчитывают по известным формулам:

$$\sigma = \frac{M_u}{W_x}, \quad \tau = \frac{M_{кр}}{W_p},$$

где  $W_x$  – момент сопротивления при изгибе,  $W = \pi d^3/32$ ;

$W_p$  – момент сопротивления при кручении,  $W_p = \pi d^3/16 = 2W_x$ .

Подставим эти значения в (а) и (б), получим:

$$\sigma_P^{III} = \sqrt{\frac{W_U^2}{W^2} + \frac{4\tau^2}{4W^2}} = \frac{\sqrt{M_U^2 + \tau^2}}{W}; \quad (8.2)$$

$$\sigma_P^{IV} = \sqrt{\frac{W_U^2}{W^2} + \frac{3\tau^2}{4W^2}} = \frac{\sqrt{M_U^2 + 0,75\tau^2}}{W}. \quad (8.3)$$

Расчетный момент по третьей и четвертой теории прочности:

$$M_P^{III} = \sqrt{M_U^2 + M_\kappa^2}; \quad (8.4)$$

$$M_P^{IV} = \sqrt{M_U^2 + 0,75M_\kappa^2}. \quad (8.5)$$

**Пример 11.** На рисунке 8.2 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения прямыми углами в точках В и С. На стержень действует вертикальная нагрузка.  $\alpha=1,2$

**Требуется:**

1. Построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов.
2. Установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

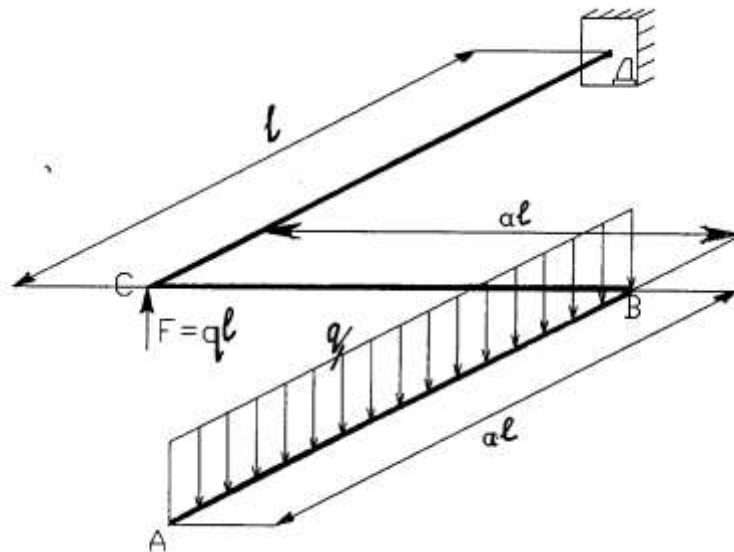
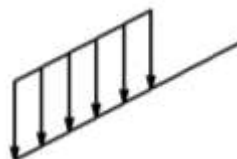


Рис.8.2

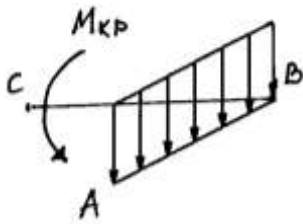
**Решение:**

1. Построение эпюры крутящих моментов. Расчет ведем со свободного конца, двигаясь к заделке (от точки  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ )

Участок АВ – кручения нет

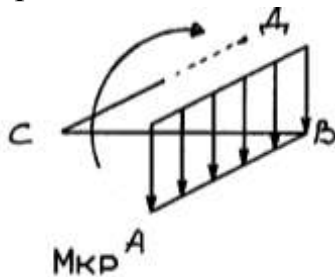


Участок СВ: на этом участке крутящий момент создает нагрузка, приложенная на участке АВ, против часовой стрелки.



$$M_{кр} = -q * \alpha l * \frac{\alpha l}{2} = -ql^2 1,2 * 0,6 = -0,72ql^2$$

Участок CD: Этот участок скручивает тоже нагрузка q, но по часовой стрелке.



$$M_{кр} = q * \alpha l * \alpha l = q * 1,2 * l^2 * 1,2 = 1,44ql^2$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов (рис.8.3).

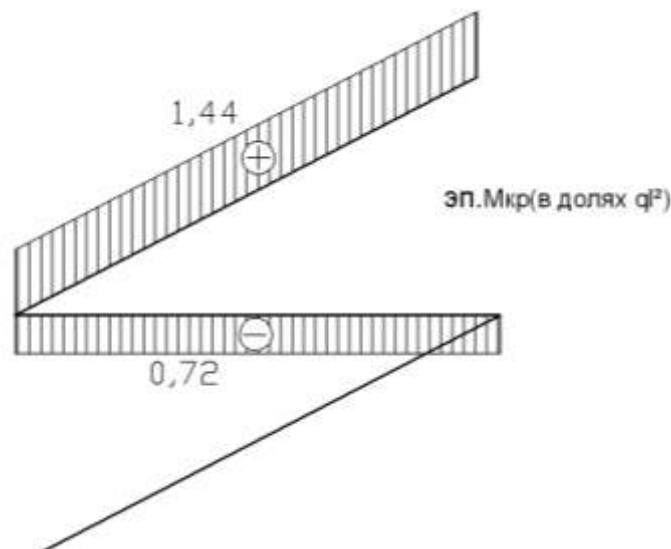


Рис.8.3 – Эпюра крутящих моментов

## 2. Построение эпюры изгибающих моментов.

Правило знаков для изгибающего момента: Изгибающий момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна.



Участок АВ:  $0 \leq z_1 \leq \alpha l$

$$M_u = -q \frac{z_1^2}{2}$$

$$M_u(0) = 0,$$

$$M_u\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = -q * \frac{\alpha l}{2} * \frac{\alpha l}{4} = -0,18ql^2$$

Участок ВС:

Для этого участка вся нагрузка, расположенная на участке АВ, считается приложенной в точке В.

$$0 \leq z_2 \leq \alpha l$$

$$M_u = -q * \alpha l * z_2$$

$$M_u(0) = 0,$$

$$M_u(\alpha l) = -q * \alpha l * \alpha l = -1,44ql^2$$

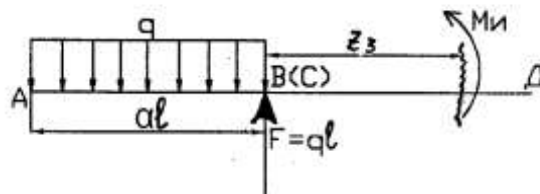
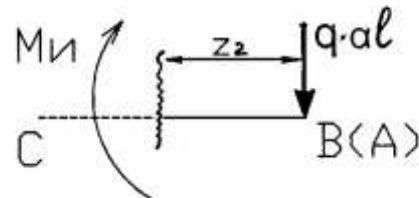
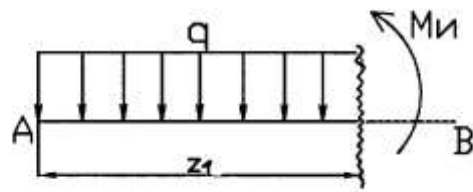
Участок СД:

$$0 \leq z_3 \leq l$$

$$M_u = -q * \alpha l * \left(\frac{\alpha l}{2} + z_3\right) + F * z_3$$

$$M_u(0) = -q * \alpha l * \frac{\alpha l}{2} = -0,72ql^2,$$

$$M_u(l) = -q * \alpha l * \left(\frac{\alpha l}{2} + l\right) + F * l = -1,92ql^2 + ql^2 = -0,92ql^2$$



По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов (рис.8.3) на растянутых волокнах ( значения с «-» откладываются сверху, а значения с «+» внизу).

3. Опасным сечением будет являться такое сечение стержня, где действуют наибольшие крутящие и изгибающие моменты.

Рассмотрим несколько сечений:

Участок ВС, точка С, где  $M_{кр} = 0,72ql^2$ ,  $M_u = 1,44ql^2$

Участок СД, точка Д, где  $M_{кр} = 1,44ql^2$ ,  $M_u = 0,92ql^2$

Для оценки прочности при совместном действии изгиба и кручения пользуются теориями прочности, т.к. материал находится в условиях сложного напряженного состояния.

По IV теории прочности (энергетической) расчетное напряжение определяется:

$$\sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{w_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{w_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}}{w_x},$$

где  $M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}$  - расчетный момент по IV теории прочности,

$\sigma = \frac{M_u}{w_x}$  - нормальные напряжения, возникающие при изгибе,

$\tau = \frac{M_{kp}}{w_p}$  - касательные напряжения, возникающие при кручении,

$w_p = 2w_x$  - полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения.

Определяем расчетный момент для выбранных сечений:

Точка С :  $M_{расч}^{IV} = ql^2 \sqrt{1,44^2 + 0,75 \cdot 0,72^2} = 1,57ql^2$

Точка Д :  $M_{расч}^{IV} = ql^2 \sqrt{0,92^2 + 0,75 \cdot 1,44^2} = 1,55ql^2$

Опасным будет являться сечение С на участке ВС, т.к. в этом сечении расчетный момент максимальный.

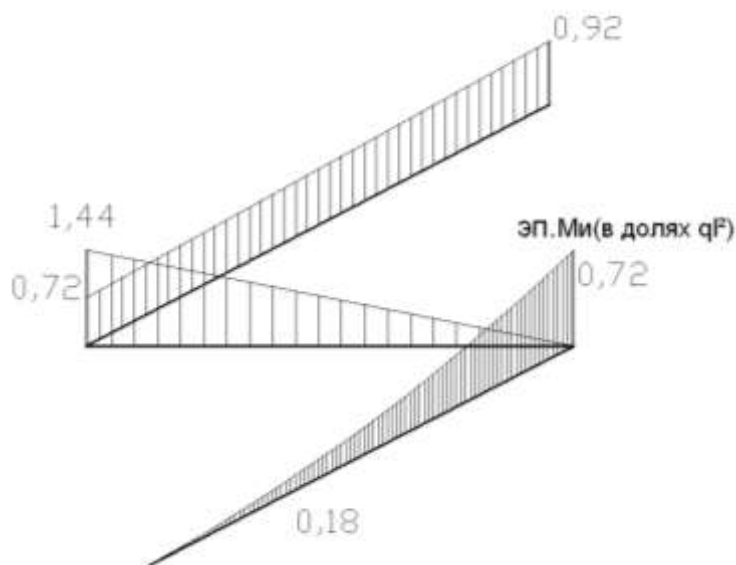
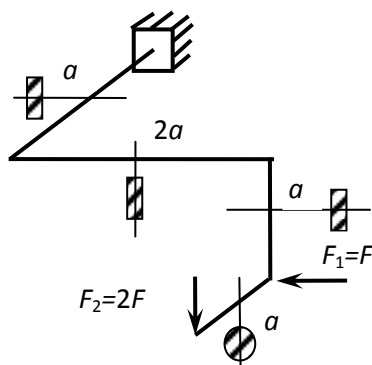


Рис.8.3 – Эпюры изгибающих моментов

**Пример12. Расчет ломаного пространственного бруса, изображенного на рис.8.4.** Исходные данные:  $F=1\text{кН}$ ;  $a=1,5\text{м}$ ;  $[\sigma]=140\text{МПа}$ ;  $\frac{h}{b} = 2$ .



**Требуется:**

подобрать размеры поперечных сечений заданной формы участков стального ломаного бруса.

Рис.8.4

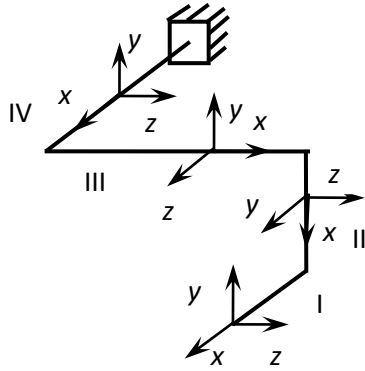


Рис.8.5

Так эпюры от сил будут:

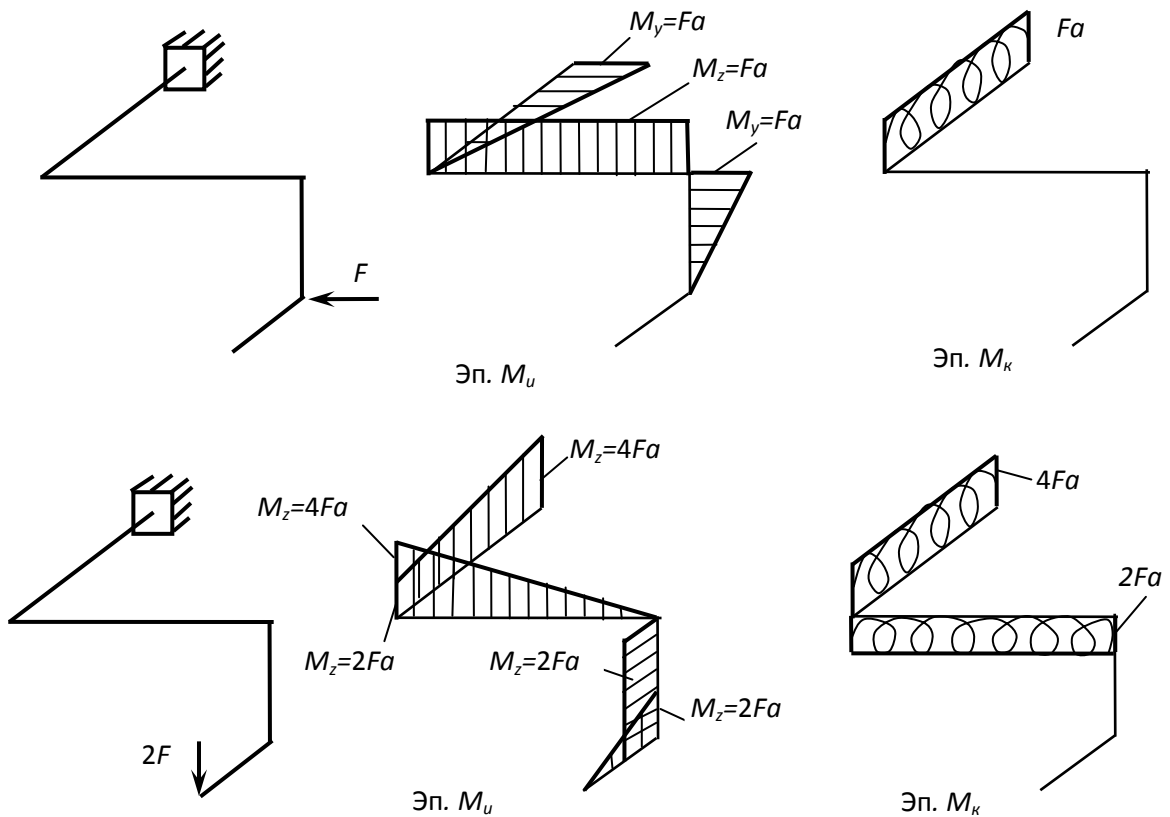


Рис.8.6. Эпюры изгибающих и крутящих моментов

Эпюры изгибающих моментов здесь показаны на растянутых волокнах.

Анализируя эпюры, устанавливаем вид сопротивления в опасных сечениях каждого участка бруса:

I:  $M_z = Fa$  – прямой изгиб,

II:  $M_y = Fa$ ,  $M_z = 2Fa$  – косой изгиб,

III:  $M_z = 5Fa$ ,  $M_k = 2Fa$  – прямой изгиб с кручением,

IV:  $M_y = Fa$ ,  $M_z = 4Fa$ ,  $M_k = 5Fa$  – косой изгиб с кручением.

Подбор сечений производим из соответствующих условий прочности:

## Решение.

1. Нумеруем участки и показываем координатные оси для каждого из участков (рис.8.5).

При решении задачи прочности будем учитывать только моменты: изгибающие и крутящие. Другими внутренними усилиями пренебрегаем. Кроме того, для простоты восприятия рассмотрим отдельно действие силы  $F_1$  и  $F_2$ .

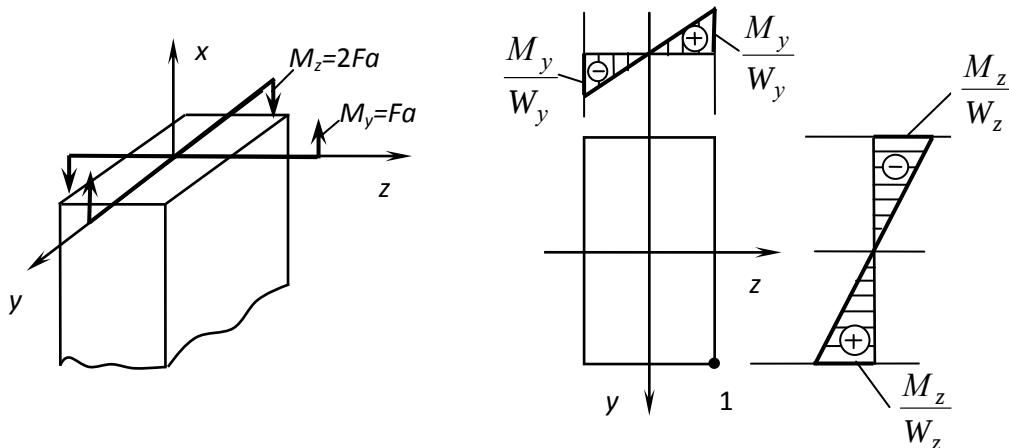
1. Изгиб:  $\max \sigma = \frac{|M|}{W} \leq [\sigma]$ , откуда

$$W \geq \frac{|M|}{[\sigma]} = \frac{2Fa}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{140 \cdot 10^6} = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Для круглого сечения  $W = \frac{\pi d^3}{32}$ , поэтому  $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 5,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

(5,98см). Принимаем  $d=6\text{см}$ .

2. Косой изгиб:  $M_y = Fa$ ,  $M_z = 2Fa$ .



В угловой точке 1 напряжение имеет наибольшее значение. Условие прочности косого изгиба в этой точке:  $\max \sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$ .

Для прямоугольника с размерами  $h$  и  $b$ :  $W_y = \frac{hb^2}{6}$ ,  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ .

Для рассматриваемого случая  $\frac{h}{b} = 2$ :  $W_y = \frac{b^3}{3}$ ,  $W_z = \frac{2b^3}{3}$ .

Подставляя в условие прочности, будем иметь:

$$\frac{M_y \cdot 3}{b^3} + \frac{M_z \cdot 3}{2b^3} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_y + 1,5M_z}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{140 \cdot 10^6}} = 5,19 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

(или 5,19см).

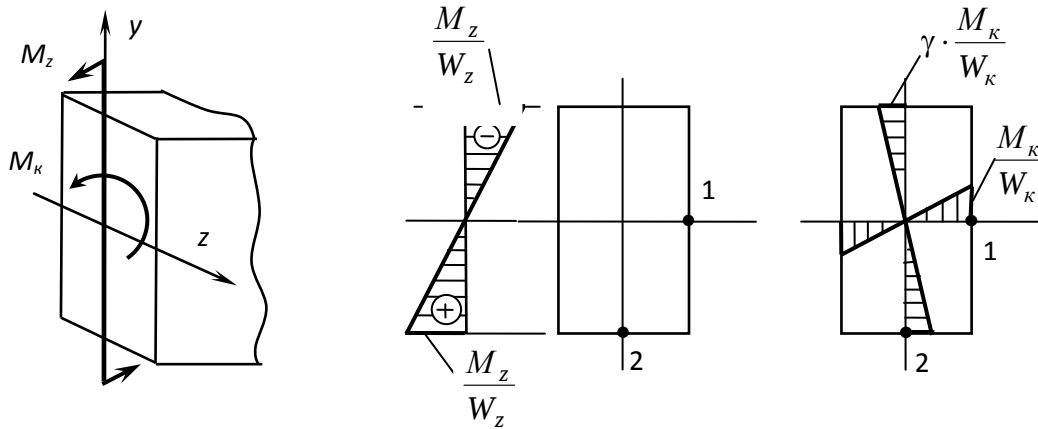
Принимаем:  $b=5,2\text{см}$ ,  $h=2b=10,4\text{см}$ .

3. Изгиб с кручением  $M_z = 5Fa$ ,  $M_k = 2Fa$

Наиболее напряженными точками в опасном сечении участка III являются точки 1 и 2, в которых:

в т. 1:  $\tau = \tau_{max} = \frac{M_K}{W_K}$ ,  $\sigma = 0$  – чистый сдвиг;

в т. 2:  $\tau = \gamma \tau_{max}$ ,  $\sigma = \sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}$  - изгиб с кручением.



В обеих точках возникает плоское напряженное состояние, значит, для оценки прочности необходимы теории прочности. Более опасной точкой является та, где эквивалентное (расчетное) напряжение по той или иной теории прочности окажется больше.

Применим третью теорию прочности (наибольших касательных напряжений). С позиций этой теории эквивалентное напряжение в точке 1 будет:  $\sigma_{экв(1)}^{III} = 2\tau_{max} = 2 \cdot \frac{M_K}{W_K}$ .

Для прямоугольного сечения с  $h/b = 2$ :  $\gamma = 0,795$ ;  $\alpha = 0,246$ , поэтому  $W_K = \alpha b^2 h = 0,246 \cdot b^2 \cdot 2b = 0,492b^3$ , и тогда

$$\sigma_{экв(1)}^{III} = \frac{2 \cdot 2Fa}{0,492b^3} = \frac{8,128Fa}{b^3}.$$

Эквивалентное напряжение в точке 2, где  $\sigma = \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau = \gamma \cdot \frac{M_K}{W_K}$ :

$$\sigma_{экв(2)}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\gamma \cdot \frac{M_K}{W_K}\right)^2}.$$

Учитывая, что  $W_z = \frac{2b^3}{3}$ , а  $W_K = 0,492b^3$ , будем иметь:

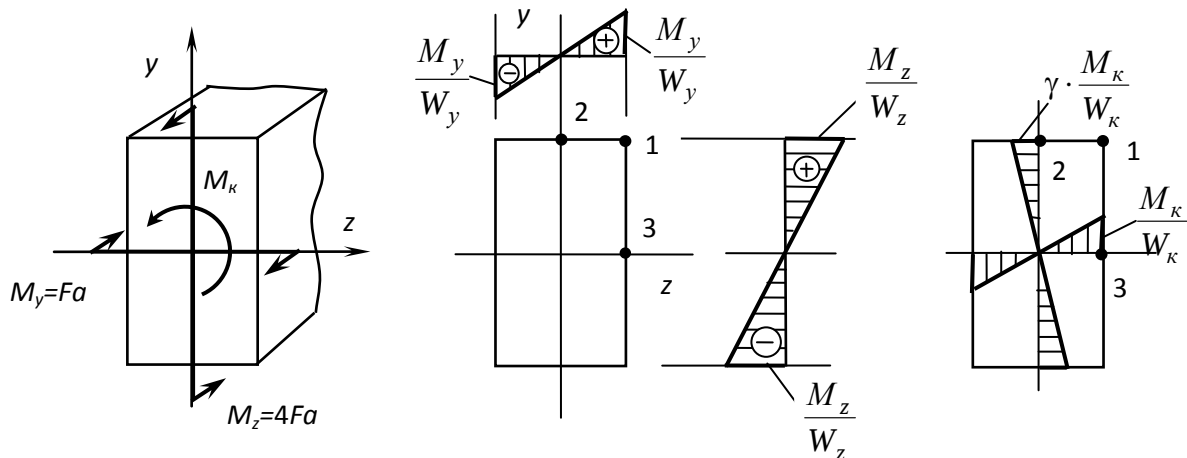
$$\sigma_{экв(2)}^{III} = \sqrt{\left(\frac{5Fa \cdot 3}{2b^3}\right)^2 + 4\left(0,795 \cdot \frac{2Fa}{0,492b^3}\right)^2} = \frac{9,9Fa}{b^3}.$$

Таким образом, более опасной является точка 2, где  $\sigma_{\text{экв}(2)}^{\text{III}} = \frac{9,9Fa}{b^3}$ .

Тогда из условия прочности  $\sigma_{\text{экв}(2)}^{\text{III}} \leq [\sigma]$  находим:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{9,9 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{140 \cdot 10^6}} = 4,73 \cdot 10^{-2} \text{ м (4,73 см)}. \text{ Принимаем: } b=4,8 \text{ см, } h=9,6 \text{ см.}$$

Наконец, на IV участке, в опасном сечении которого возникает косой изгиб с кручением  $M_y=Fa$ ,  $M_z=4Fa$ ,  $M_k=5Fa$ :



в точке 1:  $\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau=0$ ;      в точке 2:  $\sigma = \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau = \gamma \tau_{\text{max}}$ ;

в точке 3:  $\sigma = \frac{M_y}{W_y}$ ,  $\tau = \tau_{\text{max}}$ .

Какая из них опаснее? Очевидно, та, где больше величина  $\sigma_{\text{экв}}$ .

При  $h/b = 2$ :  $W_y = \frac{b^3}{3}$ ,  $W_z = \frac{2b^3}{3}$ ;  $W_k = 0,492b^3$ ;  $\gamma=0,795$ .

В точке 1 отсутствует касательное напряжение, и напряженное состояние является линейным с расчетным напряжением

$$\sigma_{\text{расч}(1)} = \frac{Fa \cdot 3}{b^3} + \frac{4Fa \cdot 3}{2b^3} = \frac{9Fa}{b^3}.$$

В точке 2:  $\sigma = \frac{4Fa \cdot 3}{2b^3} = \frac{6Fa}{b^3}$ ;  $\tau = 0,795 \cdot \frac{5Fa}{0,492b^3} = \frac{8,08Fa}{b^3}$ , тогда

$$\sigma_{\text{экв}(2)}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{9Fa}{b^3}\right)^2 + 4\left(\frac{8,08Fa}{b^3}\right)^2} = \frac{17,24Fa}{b^3}.$$

В точке 3:  $\sigma = \frac{Fa \cdot 3}{b^3}$ ;  $\tau = \frac{5Fa}{0,492b^3} = \frac{10,16Fa}{b^3}$ ,

$$\sigma_{экв(3)}^{III} = \sqrt{\left(\frac{3Fa}{b^3}\right)^2 + 4\left(\frac{10,16Fa}{b^3}\right)^2} = \frac{20,54Fa}{b^3}.$$

Из сравнения следует, что наиболее опасной точкой в опасном сечении IV участка является точка 3. Тогда из условия прочности в этой точке находим:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{20,54 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{140 \cdot 10^6}} = 6,03 \cdot 10^{-2} \text{ м (6,03 см)}. \text{ Принимаем: } b=6 \text{ см, } h=12 \text{ см}.$$

Таким образом, размеры поперечных сечений всех участков бруса определены.

### 9. Устойчивость сжатых стержней

Выход конструкции из строя может произойти не только из-за того, что теряется прочность, но и потому, что равновесие конструкций в силу тех или иных причин окажется неустойчивым. Во многих случаях, кроме проверки прочности, необходимо производить еще проверку устойчивости элементов конструкций.

Состояние равновесия считается устойчивым, если при любом возможном отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть её в первоначальное положение.

Неустойчивое равновесное состояние будет в том случае, когда хотя бы при одном из возможных отклонений системы от положения равновесия возникнут силы, стремящиеся удалить её от начального положения.

Состояние равновесия будет безразличным, если при разных отклонениях системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть её в начальное положение, но хотя бы при одном из возможных отклонений система продолжает оставаться в равновесии при отсутствии сил, стремящихся вернуть её в начальное положение или удалить от этого положения.

При переходе от устойчивого равновесного состояния к неустойчивому конструкция проходит через состояние безразличного равновесия. Состояние безразличного равновесия, представляющее как бы границу между двумя основными состояниями – устойчивым и неустойчивым, называется критическим состоянием. Нагрузка, при которой конструкция сохраняет состояние безразличного равновесия, называется **критической** нагрузкой.

Эксперименты показывают, что обычно достаточно немного увеличить нагрузку по сравнению с её критическим значением, чтобы конструкция из-за больших деформаций потеряла свою несущую способность, вышла из строя. В строительной технике потеря устойчивости даже одним элементом

конструкции вызывает перераспределение усилий во всей конструкции и нередко влечет к аварии.

Критическую силу определяем по двум формулам:

Если гибкость стержня больше предельной, то используем формулу Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (9.1)$$

где  $I_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения,  $E$  – модуль упругости стали,  $\mu$  – коэффициент, зависящий от условий концов стержня и называется коэффициентом приведения длины стержня (рис.9.1),  $l$  – длина стержня.

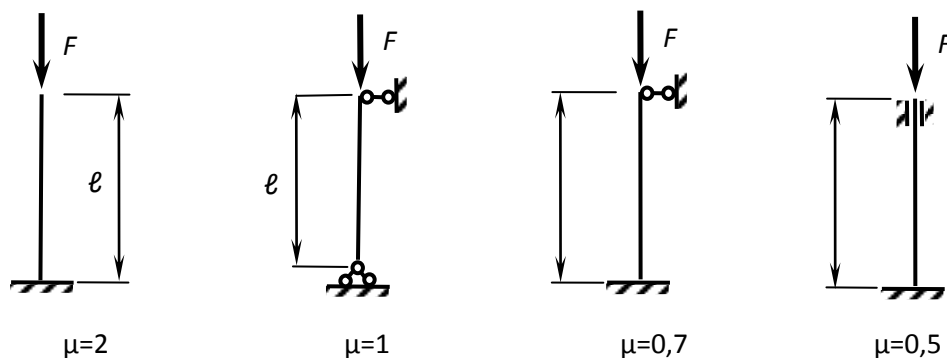


Рис.9.1. Схемы стержней и соответствующие им коэффициенты приведения длины

Если гибкость стержня меньше предельной, то используем формулу Ясинского для определения критической силы (Н):

$$F_{кр} = A \cdot (a - \epsilon \lambda) \cdot 10^6, \quad (9.2)$$

где:  $A$  – площадь поперечного сечения в  $\text{м}^2$ ,  $a$  и  $\epsilon$  – коэффициенты (для стали  $a=310$  МПа,  $\epsilon=1,14$  МПа),  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  – гибкость стержня,  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – минимальный радиус инерции.

Предельное значение гибкости стержня, при котором формула Эйлера еще оказывается верной, определяется по формуле:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}; \quad (9.3)$$

для стали  $\lambda_{np} = 100$ , чугуна  $\lambda_{np} = 80$ , сосны  $\lambda_{np} = 110$ .

Расчет стержней на устойчивость производится с учетом коэффициента снижения допускаемых напряжений (коэффициента продольного изгиба). Величина его всегда меньше единицы. Для определения значений

коэффициентов  $\varphi$  в зависимости от гибкости стержня  $\lambda$  и материала составлены таблицы. Таблицы имеются в справочниках и в СНиП.

Таблица 9.1

| Гибкость | Значения $\varphi$ для |        |        |
|----------|------------------------|--------|--------|
|          | Стали марок 3 и 4      | Чугуна | Дерева |
| 0        | 1,0                    | 1,00   | 1,00   |
| 10       | 0,99                   | 0,97   | 0,99   |
| 20       | 0,96                   | 0,91   | 0,97   |
| 30       | 0,94                   | 0,81   | 0,93   |
| 40       | 0,92                   | 0,69   | 0,87   |
| 50       | 0,89                   | 0,57   | 0,80   |
| 60       | 0,86                   | 0,44   | 0,71   |
| 70       | 0,81                   | 0,34   | 0,60   |
| 80       | 0,75                   | 0,26   | 0,48   |
| 90       | 0,69                   | 0,20   | 0,38   |
| 100      | 0,60                   | 0,16   | 0,31   |
| 110      | 0,52                   | -      | 0,25   |
| 120      | 0,45                   | -      | 0,22   |
| 130      | 0,40                   | -      | 0,18   |
| 140      | 0,36                   | -      | 0,16   |
| 150      | 0,32                   | -      | 0,14   |
| 160      | 0,29                   | -      | 0,12   |
| 170      | 0,26                   | -      | 0,11   |
| 180      | 0,23                   | -      | 0,10   |
| 190      | 0,21                   | -      | 0,09   |
| 200      | 0,19                   | -      | 0,08   |

Расчетную формулу на устойчивость можно представить в следующем виде:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \quad (9.4)$$

Практические задачи на продольный изгиб можно разделить на три основные группы:

1. Определение допустимой нагрузки на стойку при заданных: длине стойки, способе закрепления концов, площади поперечного сечения и характеристиках материала.
2. Определение (подбор) сечения стойки: по длине стойки, способу закрепления концов, роду материала и величине сжимающей силы.
3. Проверка продольно сжатых стержней на устойчивость.

**Пример 13.** Стальной стержень длиной  $\ell=3$  м, закрепленный, как показано на рис.9.2, сжимается силой  $F=500$  кН.

**Требуется:** - подобрать поперечное сечение стержня,  
-определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости

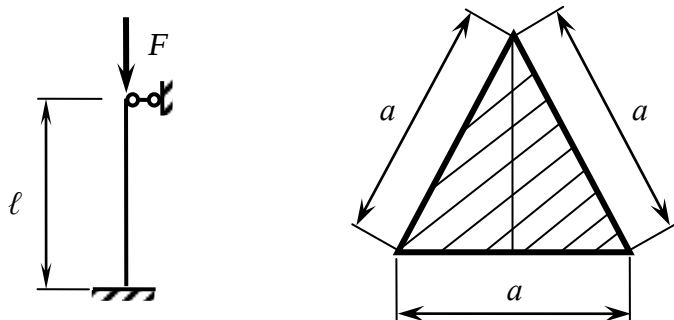


Рис.9.2

**Решение.**

1) Задачу начинаем решать с определения геометрических характеристик поперечного сечения:

а) Площадь:  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0,866a = 0,433a^2$

б) Минимальный момент инерции: определяем моменты инерции относительно осей  $X$  и  $Y$  и выбираем наименьший:

$$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{a \cdot 0,6495a^3}{36} = 0,018a^4 ; I_y = \frac{hb^3}{48} = \frac{0,866a \cdot a^3}{48} = 0,018a^4, I_{\min} = 0,018a^4$$

в) Минимальный радиус инерции:  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,018a^4}{0,433a^2}} = 0,2a$

2) Определяем размеры поперечного сечения при силе  $F=500$  кН и расчетном сопротивлении для стали  $R=210$  МПа.

Этот пункт решаем методом последовательных приближений.

Задаемся коэффициентом продольного изгиба:  $\varphi_1=0,5$  и из условия устойчивости (9.4) находим необходимую площадь поперечного сечения.

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 47,62 \text{ см}^2.$$

С другой стороны, площадь поперечного сечения найдена в п.1а. Приравниваем два значения и определяем необходимый размер поперечного сечения:  $A = 0,433a^2 = 47,62 \text{ см}^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{47,62}{0,433}} = 10,49 \text{ см}.$

Проверяем коэффициент  $\varphi_1$ , для этого считаем гибкость стержня:

$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{0,2a} = \frac{1050}{a}$ , где  $\mu$  - коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления стержня,  $\ell$ -длина стержня в см.

$$\lambda_1 = \frac{1050}{a} = \frac{1050}{10,49} = 100,09,$$

По таблице с помощью метода интерполяции находим коэффициент  $\varphi'_1 = 0,60$ , Сравниваем принятый и полученный коэффициент:  $\varphi_1 \neq \varphi'_1$ . Коэффициенты не равны, поэтому продолжаем дальше решение задачи.

В следующем приближении принимаем:  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,6}{2} = 0,55$  и делаем такой же расчет:

$$A \geq \frac{F}{\varphi_2 \cdot R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,55 \cdot 210 \cdot 10^6} = 43,29 \text{ см}^2, \quad A = 0,433a^2 = 43,29 \text{ см}^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{43,29}{0,433}} = 9,99 \text{ см}$$

$$\lambda_2 = \frac{1050}{a} = \frac{1050}{9,99} = 105 \quad \varphi'_2 = 0,56 \quad \varphi_2 \neq \varphi'_2$$

$$\text{Третье приближение} \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,55 + 0,56}{2} = 0,555$$

$$A \geq \frac{F}{\varphi_3 \cdot R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,555 \cdot 210 \cdot 10^6} = 42,9 \text{ см}^2, \quad A = 0,433a^2 = 42,9 \text{ см}^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{42,9}{0,433}} = 9,95 \text{ см}$$

$$\lambda_3 = \frac{1050}{a} = \frac{1050}{9,95} = 105,53, \quad \varphi'_3 = 0,555, \quad \varphi_3 = \varphi'_3 - \text{коэффициенты сошлись}$$

(должны быть одинаковы два знака после запятой), значит размеры поперечного сечения считаются найденными:  $A = 42,87 \text{ см}^2$ ,  $a = 9,95 \text{ см}$

3) Вычисляем критическую силу и коэффициент запаса устойчивости:

Т.к. гибкость стержня  $\lambda_3 = 105,53$  больше предельной, которую для стальных стержней принимаем равную 100, то критическую силу считаем по формуле Эйлера (в противном случае по ф. Ясинского):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 176,43 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 3)^2} = 841,18 \text{ кН},$$

где  $I_{\min} = 0,018a^2 = 0,018 \cdot 9,95^2 = 176,43 \text{ см}^4$ ,  $E$ -модуль упругости стали.

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{841,18}{500} = 1,68$$

**Пример 14.** Стальной стержень длиной  $\ell=2.2$  м, закрепленный, как показано на рис.9.3, сжимается силой  $F=200$  кН.

**Требуется:** - подобрать поперечное сечение стержня,  
-определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости

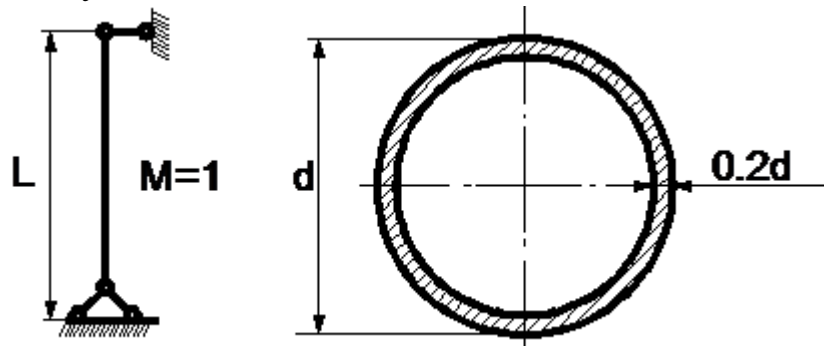


Рис.9.3

1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения.

а) Площадь  $A = \frac{\pi}{4}(d^2 - 0,36d^2) = 0,502d^2$

б) Минимальный момент инерции

$$Y_x = Y_y = Y_{\min} = \frac{\pi}{64}[d^4 - (0,6d)^4] = 0,502d^2$$

в) Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{Y_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,0427d^4}{0,502d^2}} = 0,292d$$

2. Размеры поперечного сечения при  $F=200$ кН  $R=210$  МПа

Задаётся коэффициентом  $\varphi_1 = 0,5$  и из условия устойчивости (9.4) находим необходимую площадь поперечного сечения.

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{200 \times 10^3}{0,5 \times 210 \times 10^6} = 19,05 \text{ cm}^2 \rightarrow d = 6,16 \text{ cm}$$

Проверяем коэффициент  $\varphi_1$ , для этого считаем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{Ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 220}{0,292d} = \frac{753,4}{d}, \text{ где } \mu - \text{коэффициент приведенной длины, зависящий от}$$

способа закрепления стержня,  $l$ -длина стержня в см.

$$\lambda_1 = 122,31$$

По таблице с помощью метода интерполяции находим коэффициент  $\varphi'_1 = 0,4314$ . Сравниваем принятый и полученный коэффициент:  $\varphi_1 \neq \varphi'_1$ . Коэффициенты не равны, поэтому продолжаем дальше решение задачи.

В следующем приближении принимаем:  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = 0,4692$  и делаем такой же расчет:

$$A \geq \frac{200 \times 10^3}{0,4692 \times 210 \times 10^6} = 20,3 \text{ см}^2 \rightarrow d = 6,36 \text{ см}$$

Гибкость стержня

$$\lambda_2 = \frac{753,4}{6,36} = 118,46 \quad \varphi'_2 = 0,466 \approx \varphi_2 \quad d = 6,36 \text{ см} \quad A = 20,31 \text{ см}^2$$

3. Вычисляем критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Т.к. гибкость стержня  $\lambda_3 = 118,46$  больше предельной, которую для стальных стержней принимаем равную 100, то критическую силу считаем по формуле Эйлера (в противном случае по ф. Ясинского):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E Y_{\min}}{(Ml)^2} = \frac{3,14^2 \times 2 \times 10^{11} \times 0,427 \times 6,36^4 \times 10^{-8}}{(1 \times 2,2)^2} = 284,64 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса устойчивости: 
$$h_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{284,64}{200} = 1,42$$

## 10. Ударное действие нагрузки на упругую систему

На упругую систему, неподвижно закрепленную, с высоты  $h$  падает груз весом  $Q$ . Пройдя путь  $h$ , груз приходит в соприкосновение с неподвижной системой. Это явление называется **ударом**. При изучении удара предполагается, что удар является неупругим т.е. груз после соприкосновения с конструкцией движется совместно с ней. После удара скорость перемещения груза становится равной нулю. В этот момент деформация конструкции и напряжения, возникающие в ней, достигают своих наибольших значений. Явление удара возникает в том случае, когда скорость движения рассматриваемого тела или связанных с ним тел изменяется за очень короткий период времени, измеряемый иногда тысячными долями секунды. Из-за такого резкого изменения скорости, от ударяемого тела на ударяющее во время удара передаются весьма большие ускорения, направленные в сторону, обратную движению ударяющего тела, а значит, передаются и большие силы инерции, вызывающие значительные напряжения в обоих соударяющихся телах.

Исследования характера изменений инерционных сил в процессе удара весьма затруднительно, поэтому решение инженерных задач строится обычно на основе приближенной теории упругого удара, в которой задачи, связанные с действием динамических нагрузок (удар), решаются с помощью динамического коэффициента, на который умножаются все найденные значения (напряжения и прогибы) от статического воздействия. Т.е. для определения наибольших напряжений и перемещений при ударе напряжения и перемещения от силы  $Q$ , действующей статически, следует умножить на динамический коэффициент  $K_d$ , определяемый по формуле:

$$K_o = \frac{\Delta}{\Delta_{cm}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{(g\Delta_{cm})}}, \quad (10.1)$$

где  $h$  – высота падения груза,

$V$ -скорость груза в момент предшествующий удару,

$\Delta_{cm}$ - прогиб от силы  $Q$ , действующей статически.

Если удар вертикальный и поперечный, то прогиб балки от статически действующей нагрузки можно определить по ф. Симпсона:

$$\Delta_{cm} = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (M_F^H \bar{M}^H + 4M_F^{Cp} \bar{M}^{Cp} + M_F^K \bar{M}^K), \quad (10.2)$$

где  $l_i$  – длина участка;

$E$ - модуль упругости материала балки,

$I_x$  – момент инерции поперечного сечения балки;

$M_F$  – значения изгибающих моментов с грузовой эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка;

$\bar{M}$  – значения изгибающих моментов с единичной эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка.

Грузовая эпюра моментов строится от воздействия силы  $Q$ . Для построения единичной эпюры необходимо убрать всю внешнюю нагрузку и в месте удара приложить единичную силу  $F=1$ .

Рассмотрим случай, когда высота падения груза равна нулю. Такой случай носит название внезапного действия (или мгновенного приложения) нагрузки. При  $h=0$  из формулы (10.1) получаем  $K_o = 1 + \sqrt{1+0} = 2$ , следовательно, при внезапном приложении нагрузки деформации системы и напряжения в ней вдвое больше чем при статическом действии той же нагрузки. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, следует избегать внезапного приложения нагрузки.

**Пример 15.** На двутавровую балку (поперечное сечение в виде двутавра № 20) длиной  $l=9$ м, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис.10.1), с высоты  $h=5$  см падает груз  $Q=1200$ Н.

**Требуется:**

- найти наибольшее нормальное напряжение в балке
- определить прогиб балки в месте падения груза.

**Решение.**

1. Рассчитываем балку на действие статической нагрузки. Прикладываем силу  $Q$  в месте падения груза и строим эпюру изгибающих моментов  $M_F$  (грузовую эпюру). Для этого определяем реакции (см. решение задачи 5):

$$\sum M_A = 0, R_B = \frac{Q \cdot l}{9} = 400, \quad \sum M_B = 0, R_A = \frac{Q \cdot l}{9} = 800$$

Максимальный момент будет равен:  ~~$M_{\max} = 1,33$~~

2. В месте падения груза прикладываем единичную силу  $\bar{F} = 1$ , другую нагрузку убираем, и строим единичную эпюру (эпюру моментов от воздействия данной единичной силы).

$$\sum M_A = 0, R_B = \frac{\bar{F} \cdot 3}{9} = \frac{1}{3}, \quad \sum M_B = 0, R_A = \frac{\bar{F} \cdot 6}{9} = \frac{2}{3}$$

Максимальный момент будет равен:  ~~$M_{\max} = 0,33$~~

3. Определяем максимальный прогиб балки в месте падения груза при статическом действии нагрузки по формуле Симпсона.

~~$\Delta_{cm} = \frac{1}{6EI} \int_0^l M_F M \, dx$~~ , где  $l_i$  – длина участка;

$E$  – модуль упругости для стали, равный  $2 \cdot 10^{11}$  Па,

$I_x$  – момент инерции заданного двутавра, берется из таблиц (приложение 2);

$M_F$  – значения изгибающих моментов с грузовой эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка;

$\bar{M}$  – значения изгибающих моментов с единичной эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка.

~~$$\Delta_{cm} = \frac{1}{6EI} \left( 3 \cdot 0,41 \cdot 2,96 \cdot 0,41 + 6 \cdot 0,41 \cdot 0,33 \cdot 0,41 + 3 \cdot 0,41 \cdot 0,33 \cdot 0,41 \right) = \frac{1,4490}{2,1840} = 0,664$$~~

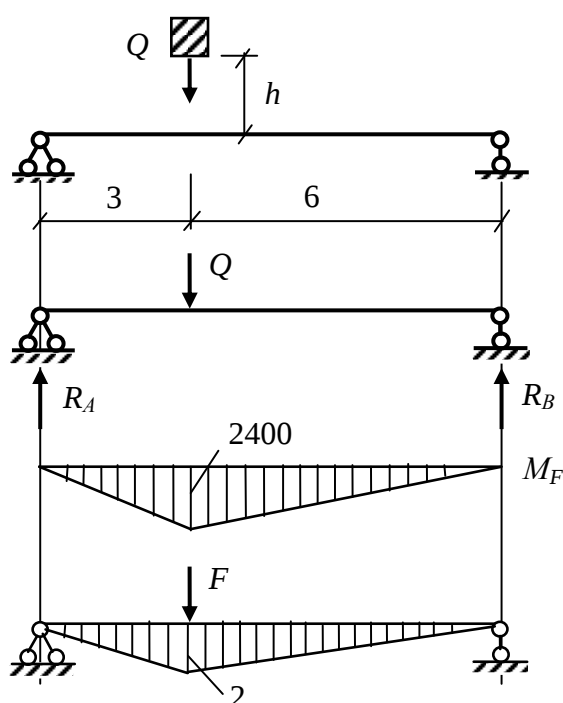


Рис.10.1 – Расчетная схема

4. Определяем динамический коэффициент по формуле:

~~$$k_d = \sqrt{\frac{21,25}{\Delta_{cm}}}$$~~

где  $H$  – высота падения груза

$\Delta_{cm}$  – прогиб от действия статической нагрузки, определенный в предыдущем пункте.

5. Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе:

$$\sigma_{\max}^d = k_d \cdot \sigma_{\max}^{cm} = k_d \cdot \frac{M_{\max}}{W_x} = 6,06 \cdot \frac{2400}{184 \cdot 10^{-6}} = 79 \text{ МПа}$$

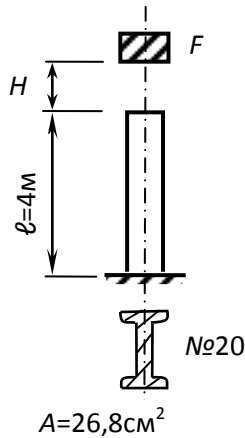
где:  $M_{\max}$  – максимальный изгибающий момент, взятый с грузовой эпюры,

$W_x$  – момент сопротивления заданного двутавра, берется из таблиц, (приложение 2)

Наибольший прогиб при ударе:



### Пример 16. Продольный удар.



Груз  $F=10\text{кН}$  падает с высоты  $H=10\text{см}$  на двутавровую стойку длиной  $\ell=4\text{м}$  (рис.10.2).

**Определить:**

- 1) максимальное нормальное напряжение
- 2) наибольшее укорочение стойки при ударе.

Считать, что стойка не теряет устойчивости.

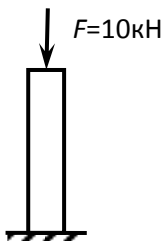
Рис.10.2

### Решение.

Расчетными формулами при ударе являются:

$$\sigma_{дин} = k_d \cdot \sigma_{ст}, \quad \Delta \ell_{дин} = k_d \cdot \Delta \ell_{ст}.$$

где динамический коэффициент при ударе



$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}},$$

$\sigma_{ст}$ ,  $\Delta \ell_{ст}$ ,  $\delta_{ст}$  - эти параметры соответствуют статическому способу приложения силы веса падающего груза, то есть:

$$|\sigma_{ст}| = \frac{N_{ст}}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 3,73 \text{ МПа},$$

$$\delta_{ст} = |\Delta \ell_{ст}| = \frac{N_{ст} \cdot \ell}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4}} = 0,746 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$\text{Тогда находим: } k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{0,746 \cdot 10^{-4}}} = 1 + 51,8 = 52,8,$$

Максимальное динамическое напряжение при ударе:  $\sigma_{дин} = 52,8 \cdot 3,73 = 193 \text{ МПа}$ ,

Наибольшая деформация стойки при ударе:

$$|\Delta \ell_{дин}| = 52,8 \cdot 0,746 \cdot 10^{-4} = 39,4 \cdot 10^{-4} \text{ м (или } \approx 4 \text{ мм)}.$$

## Литература

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – Изд.5-е, стер. –М.: Высш. шк., 2007. – 559с.
2. Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов/ Г.М.Ицкович, Л.С.Минин, А.И.Винокуров. – М.: Высшая школа, 1999. – 590с.
3. Комиссарова, И.И. Сопротивление материалов для студентов строительных специальностей: [Электронный ресурс].- Режим доступа: <http://cdo.vstu.edu.ru>
4. Кочетов, Т. В. Сопротивление материалов [Электронный ресурс].- Режим доступа:<http://obuk.ru/book/83491-soprotivlenie-materialov.html>.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для вузов / Н.М. Беляев, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников. – СПб.: Иван Федоров, 2003.- 430с.
6. Семенов, В.В. Сопротивление материалов: курсовые и расчет.-проектировоч. работы: учебное пособие по направлению «Строительство» / В.В. Семенов. – М.: АСВ, 2004. – 129с.
7. Сопротивление материалов: учебное пособие для втузов/ под ред. Н.А. Костенко.- Изд. 3-е, перераб. и доп. –М.: Высш. шк.,2007.-487с.
8. Сопротивление материалов с основа-ми теории упругости и пластичности / под ред. Г. С. Варданяна. – М.: АСВ, 1995. - 572с.
9. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для втузов / В.И. Феодосьев. - М.: МГТУ, 2000.- 591с.

Порядок определения геометрических характеристик сложного  
несимметричного сечения с помощью программы Excel

1. Вычертить сечение в масштабе (с соблюдением размеров);
2. В приложении Excel начертить таблицу следующего типа:

|    | A                                          | B             | C                | D             | E                         | F                | G                      | H                                         | I   | J                                 | K  | L                   | M  | N  |
|----|--------------------------------------------|---------------|------------------|---------------|---------------------------|------------------|------------------------|-------------------------------------------|-----|-----------------------------------|----|---------------------|----|----|
| 1  | №                                          | Вид<br>фигуры | Размеры элемента |               | Площадь<br>сечения<br>(A) | Момент инерции   |                        | расстояние от<br>оспозомозательной<br>оси |     | Расположение<br>центра<br>тяжести |    | расстояние ai<br>bi |    |    |
| 2  |                                            |               | высота<br>(h)    | ширина<br>(b) |                           | осевые           |                        | центроб<br>ежный                          | xci | yxi                               | xe | ye                  | ai | bi |
| 3  |                                            |               |                  |               |                           | Ixi              | Iyi                    |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 4  | 1                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 5  | 2                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 6  | 3                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 7  | 4                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 8  | 5                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 9  | 6                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 10 | 7                                          |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 11 |                                            |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 12 | Моменты инерции всей                       |               |                  |               | Угол поворота:            |                  | Моменты инерции фигуры |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 13 | фигуры отн. осей X,Y:                      |               |                  |               | tg2α=                     |                  | отн. главных осей      |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 14 | Ix                                         | Iy            | Ixy              | 2α(рад)=      |                           | I <sub>max</sub> | I <sub>min</sub>       | I <sub>uv</sub>                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 15 |                                            |               |                  | α(град)=      |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 16 |                                            |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 17 | Проверка: I <sub>x</sub> +I <sub>y</sub> = |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 18 | I <sub>u</sub> +I <sub>v</sub> =           |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 19 |                                            |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |
| 20 |                                            |               |                  |               |                           |                  |                        |                                           |     |                                   |    |                     |    |    |

3. Разбить сечение на простые фигуры (швеллер, двутавр, уголок, прямоугольник, треугольник, круг).
4. Вписать в таблицу следующие характеристики:

4.1 Вид фигуры в столбик **B**:

**швеллер, двутавр, уголок, прямоугольник, треугольник, круг;**

4.2.Основные размеры (высота, ширина) в столбики **C** и **D**;

4.3.Площадь фигуры каждой фигуры в столбик **E**:

4.4.Моменты инерции каждой фигуры в столбики **F,G** и **H**:

Для определения момента инерции по оси **X** первой фигуры в ячейку **F4** вписать следующую формулу:

=ЕСЛИ(B4="прямоугольник";C4\*D4\*C4\*C4/12;ЕСЛИ(B4="треугольник";D4\*C4\*C4\*C4/36;ЕСЛИ(B4="круг";3,14\*D4\*D4\*D4\*D4/64;"введите число")))

Для определения момента инерции по оси **Y** первой фигуры в ячейку **G4** вписать следующую формулу:

=ЕСЛИ(В4="прямоугольник";D4\*С4\*D4\*D4/12;ЕСЛИ(В4="треугольник";D4\*С4\*С4\*С4/36;ЕСЛИ(В4="круг";3,14\*D4\*D4\*D4\*D4/64;"введите число"))))

Для определения центробежного момента инерции *первой* фигуры в ячейку **Н4** вписать следующую формулу:

=ЕСЛИ(В4="прямоугольник";0;ЕСЛИ(В4="треугольник";D4\*С4\*С4\*D4/72;ЕСЛИ(В4="круг";0;ЕСЛИ(В4="двутавр";0;ЕСЛИ(В4="швеллер";0;"введите число")))))

Чтобы формула скопировалась на нижние ячейки нужно подвести курсор к правому нижнему углу этой ячейки, нажать на него и протащить на нижележащие ячейки.

5. Найти центр тяжести и провести оси для каждой фигуры:

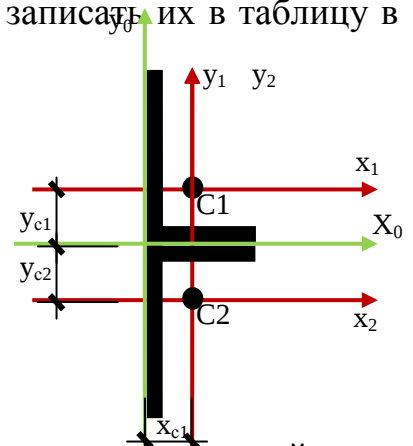
6. Выбрать вспомогательные оси  $x_0, y_0$ . Рассчитать расстояние от осей центров тяжести каждой фигуры до вспомогательных осей, записать их в таблицу в столбики **I** и **J**:

$x_{ci}$  = расстояние между осью  $y_i$  и осью  $y_0$   
(с учетом знака\*)

$y_{ci}$  = расстояние между осью  $x_i$  и осью  $x_0$   
(с учетом знака\*\*)

\*- слева от оси  $y_0$  – знак “-“, справа – знак “+”

\*\* - снизу от оси  $x_0$  – знак “-“, сверху – знак “+”



7. Найти центр тяжести всей фигуры относительно вспомогательных осей:

Для определения местонахождения центра тяжести на оси **X ВСЕЙ** фигуры в ячейку **К4** вписать следующую формулу:

=СУММПРОИЗВ(Е4:Е10;I4:I10)/СУММ(Е4:Е10)

Для определения местонахождения центра тяжести на оси **Y ВСЕЙ** фигуры в ячейку **Л4** вписать следующую формулу:

=СУММПРОИЗВ(Е4:Е10;J4:J10)/СУММ(Е4:Е10)

8. Провести центральные оси **X, Y**;

9. Определить моменты инерции всей фигуры относительно центральных осей:

9,1. Сначала нужно определить значение показателей  $a_i, b_i$ . Для этого в ячейку **М4** вписать следующую формулу: =J4-\$L\$4

в ячейку **Н4** вписать следующую формулу: =I4-\$K\$4

Чтобы формула скопировалась на нижние ячейки нужно подвести курсор к правому нижнему углу этой ячейки, нажать на него и протащить на нижележащие ячейки.

9,2. Определение моментов инерции:

Для определения момента инерции всей фигуры относительно оси  $X$  в ячейку **A15** вписать следующую формулу:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{M4:M10};\text{M4:M10};\text{E4:E10})+\text{СУММ}(\text{F4:F10})$$

Для определения момента инерции всей фигуры относительно оси  $Y$  в ячейку **B15** вписать следующую формулу:

$$=\text{СУММ}(\text{G4:G10})+\text{СУММПРОИЗВ}(\text{N4:N10};\text{N4:N10};\text{E4:E10})$$

Для определения центробежного момента инерции всей фигуры в ячейку **C15** вписать следующую формулу:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{M4:M10};\text{N4:N10};\text{E4:E10})+\text{СУММ}(\text{H4:H10})$$

10. Вписать условие проверки для главных осей:

в ячейку **A17** вписать: **Оси X,Y –**

в ячейку **B17** вписать следующую формулу:

$$=\text{ЕСЛИ}(\text{C15}=0;"\text{главные, т.к. } I_{xy}=0";"\text{не главные. т.к. } I_{xy}\neq 0")$$

11. Определить угол поворота осей:

в ячейку **F13** вписать следующую формулу:  $=2*\text{C15}/(\text{B15}-\text{A15})$

в ячейку **F14** вписать следующую формулу:  $=\text{ATAN}(\text{F13})$

в ячейку **F15** вписать следующую формулу:  $=\text{ГРАДУСЫ}(\text{ATAN}(\text{F13}/2))$

12. Провести главные оси  $U, V$ .

Если угол поворота положительный ( $\alpha > 0$ ), то **оси поворачиваются против часовой стрелки**, если отрицательный – по часовой;

13. Найти главные моменты инерции  $I_U, I_V$  ( $I_{\max}, I_{\min}$ ):

Для нахождения максимального момента инерции в ячейку **H15** вписать следующую формулу:

$$=(\text{A15}+\text{B15})/2+\text{КОРЕНЬ}(\text{СТЕПЕНЬ}((\text{A15}-\text{B15})/2;2)+\text{C15}*\text{C15})$$

Для нахождения минимального момента инерции в ячейку **I15** вписать следующую формулу:

$$=(\text{A15}+\text{B15})/2-\text{КОРЕНЬ}(\text{СТЕПЕНЬ}((\text{A15}-\text{B15})/2;2)+\text{C15}*\text{C15})$$

14. Выполнить проверку правильности решения:

14,1. Условие для центробежного момента инерции:  $I_{UV}=0$

Для проверки этого условия в ячейку **J15** вписать следующую формулу:

$$=(\text{A15}-\text{B15})*\text{SIN}(\text{F14})/2+\text{C15}*\text{COS}(\text{F14})$$

14,2. Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная:  $I_U + I_V = I_x + I_y$

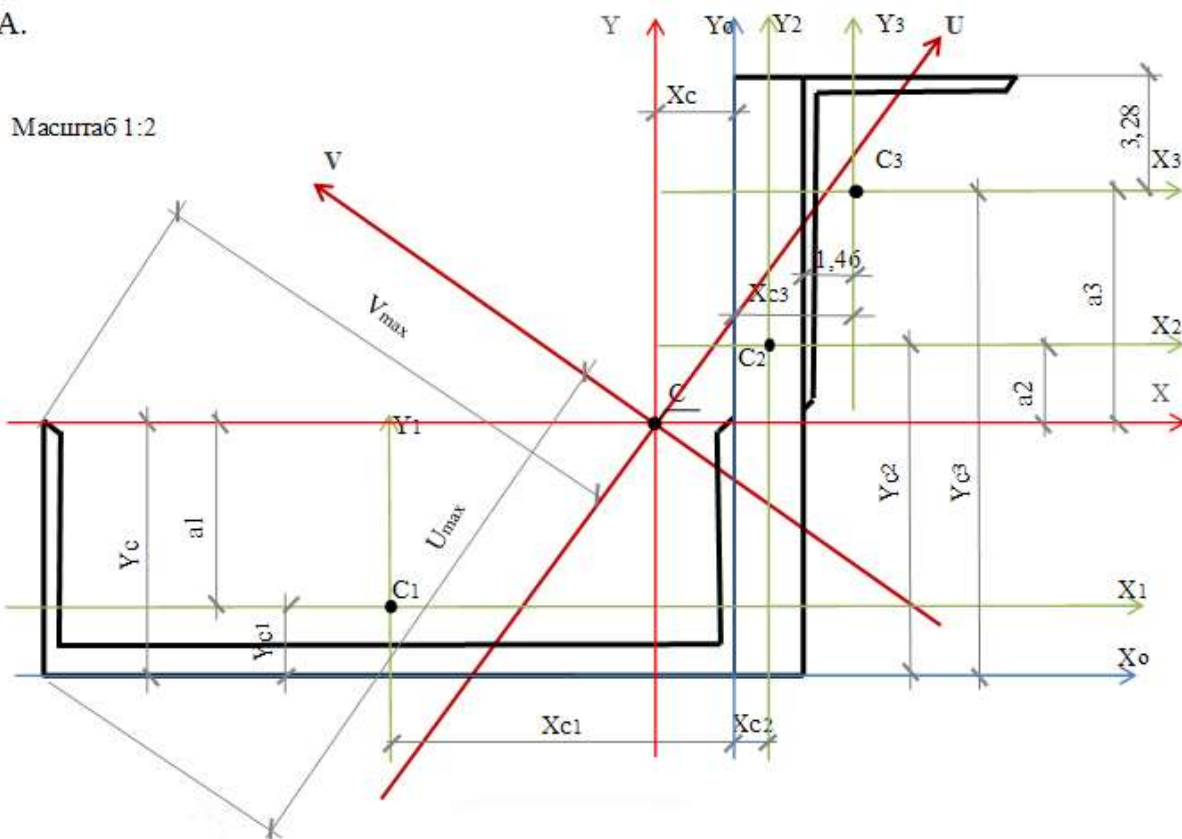
Для проверки этого условия в ячейку **J17** вписать следующую формулу:

$$=\text{A15}+\text{B15}$$

в ячейку **J18** вписать следующую формулу:  $=\text{H15}+\text{I15}$

Например, для сечения, изображенного на рисунке:

1А.



- 1) Швеллер № 18:  $A=23,4 \text{ см}^2$ ,  $I_x=113 \text{ см}^4$ ,  $I_y=1520 \text{ см}^4$ ,  $I_{xy}=0$
- 2) Лист 2x18 см
- 3) Уголок 100x63:  $A=11,09 \text{ см}^2$ ,  $I_x=112,9 \text{ см}^4$ ,  $I_y=34,99 \text{ см}^4$ ,  $I_{xy}=36,1 \text{ см}^4$

В результате подстановки данных и решения получится таблица следующего вида:

|    | A | B          | C                | D          | E                   | F              | G            | H    | I                                 | J     | K                           | L    | M               | N     |
|----|---|------------|------------------|------------|---------------------|----------------|--------------|------|-----------------------------------|-------|-----------------------------|------|-----------------|-------|
| 1  | № | Вид фигуры | Размеры элемента |            | Площадь сечения (A) | Момент инерции |              |      | расстояние от вспомогательной оси |       | Расположение центра тяжести |      | растояние ai bi |       |
| 2  |   |            | высота (h)       | ширина (b) |                     | осевые         | центробежный |      |                                   |       |                             |      |                 |       |
| 3  |   |            |                  |            |                     | Ixi            | Iyi          | Ixyi | xcі                               | ycі   | xc                          | yc   | ai              | bi    |
| 4  | 1 | швеллер    | 18               | 9          | 23,4                | 113            | 1520         | 0    | -10                               | 2,07  | -2,265                      | 7,59 | -5,53           | -7,74 |
| 5  | 2 | Прям-ник   | 18               | 2          | 36                  | 972            | 12           | 0    | 1                                 | 9     |                             |      | 1,401           | 3,265 |
| 6  | 3 | уголок     | 100              | 63         | 11,09               | 112,9          | 34,99        | 36,1 | 3,46                              | 14,72 |                             |      | 7,121           | 5,725 |
| 7  | 4 |            |                  |            |                     |                |              |      |                                   |       |                             |      |                 |       |
| 8  | 5 |            |                  |            |                     |                |              |      |                                   |       |                             |      |                 |       |
| 9  | 6 |            |                  |            |                     |                |              |      |                                   |       |                             |      |                 |       |
| 10 | 7 |            |                  |            |                     |                |              |      |                                   |       |                             |      |                 |       |

11

| 12 | Моменты инерции всей фигуры отн. осей X,Y: |          |         |
|----|--------------------------------------------|----------|---------|
| 13 | Ix                                         | Iy       | Ixy     |
| 14 | 2546,25                                    | 3714,267 | 1653,63 |

| Угол поворота: |         |
|----------------|---------|
| tg2α=          | 2,83153 |
| 2α(рад)=       | 1,2313  |
| α(град)=       | 54,7652 |

| Моменты инерции фигуры отн. главных осей |                  |                 |
|------------------------------------------|------------------|-----------------|
| I <sub>max</sub>                         | I <sub>min</sub> | I <sub>UV</sub> |
| 4883,99                                  | 1376,53          | 0               |

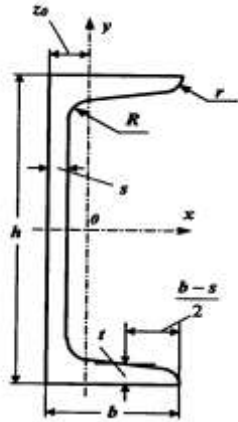
16

17 Оси X,Y не главные. т.к Ixy≠0

18

Проверка: Ix+Iy= 6260,5  
I<sub>U</sub>+I<sub>V</sub>= 6260,5

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок (ГОСТ 8240-72)



$h$ -высота,  $b$ - ширина полки,

$s$ -толщина стенки,  $t$ -толщина полки,

$A$ - площадь поперечного сечения,

$I_x, I_y$ - моменты инерции сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ,

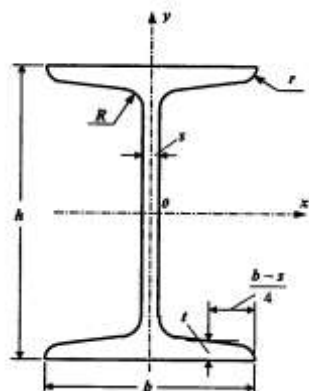
$W_x, W_y$  моменты сопротивления сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ,

$S_x$ - статический момент полусечения относительно оси  $Ox$ ,

$i_x, i_y$ - радиусы инерции сечения,

$Z_0$ - расстояние от оси  $Oy$  до наружной грани стенки

| Номер швеллера | h   | b   | s   | t    | R    | r   | Масса l м (кг) | z <sub>0</sub> см | Геометрические характеристики сечений |                                |                                |                   |                                |                                |                                |                   |
|----------------|-----|-----|-----|------|------|-----|----------------|-------------------|---------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|
|                | мм  |     |     |      |      |     |                |                   | A см <sup>2</sup>                     | I <sub>x</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub> см <sup>3</sup> | i <sub>x</sub> см | S <sub>x</sub> см <sup>3</sup> | I <sub>y</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>y</sub> см <sup>3</sup> | i <sub>y</sub> см |
| 5              | 50  | 32  | 4,4 | 7,0  | 6,0  | 2,5 | 4,84           | 1,16              | 6,16                                  | 22,8                           | 9,1                            | 1,92              | 5,59                           | 5,61                           | 2,75                           | 0,954             |
| 6,5            | 65  | 36  | 4,4 | 7,2  | 6,0  | 2,5 | 5,90           | 1,24              | 7,51                                  | 48,6                           | 15,0                           | 2,54              | 9,00                           | 8,70                           | 3,68                           | 1,080             |
| 8              | 80  | 40  | 4,5 | 7,4  | 6,5  | 2,5 | 7,05           | 1,31              | 8,98                                  | 89,4                           | 22,4                           | 3,16              | 13,30                          | 12,80                          | 4,75                           | 1,190             |
| 10             | 100 | 46  | 4,5 | 7,6  | 7,0  | 3,0 | 8,59           | 1,44              | 10,9                                  | 174,0                          | 34,8                           | 3,99              | 20,40                          | 20,40                          | 6,46                           | 1,370             |
| 12             | 120 | 52  | 4,8 | 7,8  | 7,5  | 3,0 | 10,40          | 1,54              | 13,3                                  | 304,0                          | 50,6                           | 4,78              | 29,60                          | 31,20                          | 8,52                           | 1,530             |
| 14             | 140 | 58  | 4,9 | 8,1  | 8,0  | 3,0 | 12,30          | 1,67              | 15,60                                 | 491,0                          | 70,2                           | 5,60              | 40,80                          | 45,40                          | 11,00                          | 1,700             |
| 14a            | 140 | 62  | 4,9 | 8,7  | 8,0  | 3,0 | 13,30          | 1,87              | 17,00                                 | 545,0                          | 77,8                           | 5,66              | 45,10                          | 57,50                          | 13,30                          | 1,840             |
| 16             | 160 | 64  | 5,0 | 8,4  | 8,5  | 3,5 | 14,20          | 1,80              | 18,10                                 | 747,0                          | 93,4                           | 6,42              | 54,10                          | 63,30                          | 13,80                          | 1,870             |
| 16a            | 160 | 68  | 5,0 | 9,0  | 8,5  | 3,5 | 15,30          | 2,00              | 19,50                                 | 823,0                          | 103,0                          | 6,49              | 59,40                          | 78,80                          | 16,40                          | 2,010             |
| 18             | 180 | 70  | 5,1 | 8,7  | 9,0  | 3,5 | 16,30          | 1,94              | 20,70                                 | 1090,0                         | 121,0                          | 7,24              | 69,80                          | 86,00                          | 17,00                          | 2,040             |
| 18a            | 180 | 74  | 5,1 | 9,3  | 9,0  | 3,5 | 17,40          | 2,13              | 22,20                                 | 1190,0                         | 132,0                          | 7,32              | 76,10                          | 105,00                         | 20,00                          | 2,180             |
| 20             | 200 | 76  | 5,2 | 9,0  | 9,5  | 4,0 | 18,40          | 2,07              | 23,40                                 | 1520,0                         | 152,0                          | 8,07              | 87,80                          | 113,00                         | 20,50                          | 2,200             |
| 20a            | 200 | 80  | 5,2 | 9,7  | 9,5  | 4,0 | 19,80          | 2,28              | 25,20                                 | 1670,0                         | 167,0                          | 8,15              | 95,90                          | 139,00                         | 24,20                          | 2,350             |
| 22             | 220 | 82  | 5,4 | 9,5  | 10,0 | 4,0 | 21,00          | 2,21              | 26,70                                 | 2110,0                         | 192,0                          | 8,89              | 110,00                         | 151,00                         | 25,10                          | 2,370             |
| 22a            | 220 | 87  | 5,4 | 10,2 | 10,0 | 4,0 | 22,60          | 2,46              | 28,80                                 | 2330,0                         | 212,0                          | 8,99              | 121,00                         | 187,00                         | 30,00                          | 2,550             |
| 24             | 240 | 90  | 5,6 | 10,0 | 10,5 | 4,0 | 24,00          | 2,42              | 30,60                                 | 2900,0                         | 242,0                          | 9,73              | 139,00                         | 208,00                         | 31,60                          | 2,600             |
| 24a            | 240 | 95  | 5,6 | 10,7 | 10,5 | 4,0 | 25,80          | 2,67              | 32,90                                 | 3180,0                         | 265,0                          | 9,84              | 151,00                         | 254,00                         | 37,20                          | 2,780             |
| 27             | 270 | 95  | 6,0 | 10,5 | 11,0 | 4,5 | 27,70          | 2,47              | 35,20                                 | 4160,0                         | 308,0                          | 10,90             | 178,00                         | 262,00                         | 37,30                          | 2,730             |
| 30             | 300 | 100 | 6,5 | 11,0 | 12,0 | 5,0 | 31,80          | 2,52              | 40,50                                 | 5810,0                         | 387,0                          | 12,00             | 224,00                         | 327,00                         | 43,60                          | 2,840             |
| 33             | 330 | 105 | 7,0 | 11,7 | 13,0 | 5,0 | 36,50          | 2,59              | 46,50                                 | 7980,0                         | 484,0                          | 13,10             | 281,00                         | 410,00                         | 51,80                          | 2,970             |
| 36             | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 14,0 | 6,0 | 41,90          | 2,68              | 53,40                                 | 10820,0                        | 601,0                          | 14,20             | 350,00                         | 513,00                         | 61,70                          | 3,100             |
| 40             | 400 | 115 | 8,0 | 13,5 | 15,0 | 6,0 | 48,30          | 2,75              | 61,50                                 | 15220,0                        | 761,0                          | 15,70             | 444,00                         | 642,00                         | 73,40                          | 3,230             |

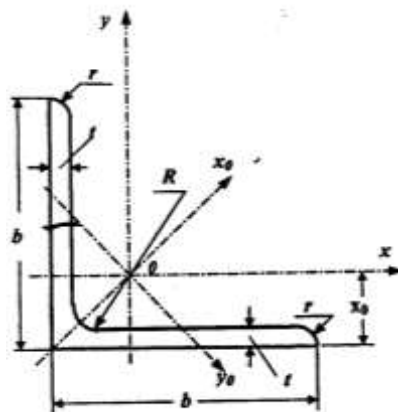


## Стальные горячекатаные двутавры с уклоном внутренних граней полков. (ГОСТ 8239-72)

h-высота, b- ширина полки,  
s-толщина стенки, t-толщина полки,  
A- площадь поперечного сечения,  
 $I_x, I_y$ - моменты инерции сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ,  
 $W_x, W_y$  моменты сопротивления сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ,  
 $S_x$ - статический момент полусечения относительно оси  $Ox$ ,  
 $i_x, i_y$ - радиусы инерции сечения

| Номер | h   | b   | s    | t    | R    | r   | Масса<br>1 м(кг) | Геометрические характеристики сечений |                                   |                                   |                      |                                   |                                   |                                   |                      |
|-------|-----|-----|------|------|------|-----|------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|
|       | мм  |     |      |      |      |     |                  | A<br>см <sup>2</sup>                  | I <sub>x</sub><br>см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub><br>см <sup>3</sup> | i <sub>x</sub><br>см | S <sub>x</sub><br>см <sup>3</sup> | I <sub>y</sub><br>см <sup>4</sup> | W <sub>y</sub><br>см <sup>3</sup> | i <sub>y</sub><br>см |
| 10    | 100 | 55  | 4,5  | 7,2  | 7,0  | 2,5 | 9,46             | 12,0                                  | 198                               | 39,7                              | 4,06                 | 23,0                              | 17,9                              | 6,49                              | 1,22                 |
| 12    | 120 | 64  | 4,8  | 7,3  | 7,5  | 3,0 | 11,50            | 14,7                                  | 350                               | 58,4                              | 4,88                 | 33,7                              | 27,9                              | 8,72                              | 1,38                 |
| 14    | 140 | 73  | 4,9  | 7,5  | 8,0  | 3,0 | 13,70            | 17,4                                  | 572                               | 81,7                              | 5,73                 | 46,8                              | 41,9                              | 11,50                             | 1,55                 |
| 16    | 160 | 81  | 5,0  | 7,8  | 8,5  | 3,5 | 15,90            | 20,2                                  | 873                               | 109,0                             | 6,57                 | 62,3                              | 58,6                              | 14,50                             | 1,70                 |
| 18    | 180 | 90  | 5,1  | 8,1  | 9,0  | 3,5 | 18,40            | 23,4                                  | 1290                              | 143,0                             | 7,42                 | 81,4                              | 82,6                              | 18,40                             | 1,88                 |
| 18a   | 180 | 100 | 5,1  | 8,3  | 9,0  | 3,5 | 19,90            | 25,4                                  | 1430                              | 159,0                             | 7,51                 | 89,8                              | 114,0                             | 22,80                             | 2,12                 |
| 20    | 200 | 100 | 5,2  | 8,4  | 9,5  | 4,0 | 21,00            | 26,8                                  | 1840                              | 184,0                             | 8,28                 | 104,0                             | 115,0                             | 23,10                             | 2,07                 |
| 20a   | 200 | 110 | 5,2  | 8,6  | 9,5  | 4,0 | 22,70            | 28,9                                  | 2030                              | 203,0                             | 8,37                 | 114,0                             | 155,0                             | 28,20                             | 2,32                 |
| 22    | 220 | 110 | 5,4  | 8,7  | 10,0 | 4,0 | 24,00            | 30,6                                  | 2550                              | 232,0                             | 9,13                 | 131,0                             | 157,0                             | 28,60                             | 2,27                 |
| 22a   | 220 | 120 | 5,4  | 8,9  | 10,0 | 4,0 | 25,80            | 32,8                                  | 2790                              | 254,0                             | 9,22                 | 143,0                             | 206,0                             | 34,30                             | 2,50                 |
| 24    | 240 | 115 | 5,6  | 9,5  | 10,5 | 4,0 | 27,30            | 34,8                                  | 3460                              | 289,0                             | 9,97                 | 163,0                             | 198,0                             | 34,50                             | 2,37                 |
| 24a   | 240 | 125 | 5,6  | 9,8  | 10,5 | 4,0 | 29,40            | 37,5                                  | 3800                              | 317,0                             | 10,10                | 178,0                             | 260,0                             | 41,60                             | 2,63                 |
| 27    | 270 | 125 | 6,0  | 9,8  | 11,0 | 4,5 | 31,50            | 40,2                                  | 5010                              | 371,0                             | 11,20                | 210,0                             | 260,0                             | 41,50                             | 2,54                 |
| 27a   | 270 | 135 | 6,0  | 10,2 | 11,0 | 4,5 | 33,90            | 43,2                                  | 5500                              | 407,0                             | 11,30                | 229,0                             | 337,0                             | 50,00                             | 2,80                 |
| 30    | 300 | 135 | 6,5  | 10,2 | 12,0 | 5,0 | 36,50            | 46,5                                  | 7080                              | 472,0                             | 12,30                | 268,0                             | 337,0                             | 49,90                             | 2,69                 |
| 30a   | 300 | 145 | 6,5  | 10,7 | 12,0 | 5,0 | 39,20            | 49,9                                  | 7780                              | 518,0                             | 12,50                | 292,0                             | 436,0                             | 60,10                             | 2,95                 |
| 33    | 330 | 140 | 7,0  | 11,2 | 13,0 | 5,0 | 42,20            | 53,8                                  | 9840                              | 597,0                             | 13,50                | 339,0                             | 419,0                             | 59,90                             | 2,79                 |
| 36    | 360 | 145 | 7,5  | 12,3 | 14,0 | 6,0 | 48,60            | 61,9                                  | 13380                             | 743,0                             | 14,70                | 423,0                             | 516,0                             | 71,10                             | 2,89                 |
| 40    | 400 | 155 | 8,3  | 13,0 | 15,0 | 6,0 | 57,00            | 72,6                                  | 19062                             | 953,0                             | 16,20                | 545,0                             | 667,0                             | 86,10                             | 3,03                 |
| 45    | 450 | 160 | 9,0  | 14,2 | 16,0 | 7,0 | 66,50            | 84,7                                  | 27696                             | 1231,0                            | 18,10                | 708,0                             | 808,0                             | 101,00                            | 3,09                 |
| 50    | 500 | 170 | 10,0 | 15,2 | 17,0 | 7,0 | 78,50            | 100,0                                 | 39727                             | 1589,0                            | 19,90                | 919,0                             | 1043,0                            | 123,00                            | 3,23                 |
| 55    | 550 | 180 | 11,0 | 16,5 | 18,0 | 7,0 | 92,60            | 118,0                                 | 55962                             | 2035,0                            | 21,80                | 1181,0                            | 1356,0                            | 151,00                            | 3,39                 |
| 60    | 600 | 190 | 12,0 | 17,8 | 20,0 | 8,0 | 108,00           | 138,0                                 | 76806                             | 2560,0                            | 23,60                | 1491,0                            | 1725,0                            | 182,00                            | 3,54                 |

## Уголки стальные горячекатаные равнополочные (ГОСТ 8509-93)



$b$  – ширина полки;  $t$  – толщина полки

$R$  – радиус внутреннего закругления,  $r$  – радиус закругления полки;

$x_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

$A$  – площадь поперечного сечения;

$I_x(=I_y)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Ox$  ( $Oy$ );

$I_{x0}(I_{y0})$  – главные моменты инерции сечения относительно осей

$Ox_0$  ( $Oy_0$ );  $I_{xy}$  – центробежный момент инерции

$W_x(=W_y)$  – момент сопротивления сечения относительно оси

$Ox$  ( $Oy$ );  $i_x(=i_y)$ ,  $i_{x0}$   $i_{y0}$  – радиусы инерции сечения.

| №   | Размеры (мм) |     |     |     | Масса<br>1 м<br>(кг) | $x_0$<br>(см) | Геометрические характеристики сечений |                            |                                      |                                      |                               |                            |                            |               |                         |                         |
|-----|--------------|-----|-----|-----|----------------------|---------------|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|-------------------------|-------------------------|
|     | $b$          | $t$ | $R$ | $r$ |                      |               | $A$<br>( $\text{см}^2$ )              | $I_x$<br>( $\text{см}^4$ ) | $I_{x0}$<br>max<br>( $\text{см}^4$ ) | $I_{y0}$<br>min<br>( $\text{см}^4$ ) | $I_{xy}$<br>( $\text{см}^4$ ) | $W_x$<br>( $\text{см}^3$ ) | $W_y$<br>( $\text{см}^3$ ) | $i_x$<br>(см) | $i_{x0}$<br>max<br>(см) | $i_{y0}$<br>min<br>(см) |
| 2   | 20           | 3   | 3,5 | 1,2 | 0,89                 | 0,60          | 1,13                                  | 0,40                       | 0,63                                 | 0,17                                 | 0,23                          | 0,28                       | 0,20                       | 0,59          | 0,75                    | 0,39                    |
|     |              | 4   | 3,5 | 1,2 | 1,15                 | 0,64          | 1,46                                  | 0,50                       | 0,78                                 | 0,22                                 | 0,28                          | 0,37                       | 0,24                       | 0,58          | 0,73                    | 0,38                    |
| 2,5 | 25           | 3   | 3,5 | 1,2 | 1,12                 | 0,73          | 1,43                                  | 0,81                       | 1,29                                 | 0,34                                 | 0,47                          | 0,46                       | 0,33                       | 0,75          | 0,95                    | 0,49                    |
|     |              | 4   | 3,5 | 1,2 | 1,46                 | 0,76          | 1,86                                  | 1,03                       | 1,62                                 | 0,44                                 | 0,59                          | 0,59                       | 0,41                       | 0,74          | 0,83                    | 0,48                    |
| 2,8 | 28           | 3   | 4,0 | 1,3 | 1,27                 | 0,80          | 1,62                                  | 1,16                       | 1,84                                 | 0,48                                 | 0,68                          | 0,58                       | 0,42                       | 0,85          | 1,07                    | 0,55                    |
| 3   | 30           | 3   | 4,0 | 1,3 | 1,36                 | 0,85          | 1,74                                  | 1,45                       | 2,30                                 | 0,60                                 | 0,85                          | 0,67                       | 0,53                       | 0,91          | 1,15                    | 0,59                    |
|     |              | 4   | 4,0 | 1,3 | 1,78                 | 0,89          | 2,27                                  | 1,84                       | 2,92                                 | 0,77                                 | 1,08                          | 0,87                       | 0,61                       | 0,90          | 1,13                    | 0,58                    |
| 3,2 | 32           | 3   | 4,5 | 1,5 | 1,46                 | 0,89          | 1,86                                  | 1,77                       | 2,80                                 | 0,74                                 | 1,03                          | 0,77                       | 0,59                       | 0,97          | 1,23                    | 0,63                    |
|     |              | 4   | 4,5 | 1,5 | 1,91                 | 0,94          | 2,43                                  | 2,26                       | 3,58                                 | 0,94                                 | 1,32                          | 1,00                       | 0,71                       | 0,96          | 1,21                    | 0,62                    |
| 3,5 | 35           | 3   | 4,5 | 1,5 | 1,60                 | 0,97          | 2,04                                  | 2,35                       | 3,72                                 | 0,97                                 | 1,37                          | 0,93                       | 0,71                       | 1,07          | 1,35                    | 0,59                    |
|     |              | 4   | 4,5 | 1,5 | 2,10                 | 1,01          | 2,67                                  | 3,01                       | 4,76                                 | 1,25                                 | 1,75                          | 1,21                       | 0,88                       | 1,06          | 1,33                    | 0,68                    |
|     |              | 5   | 4,5 | 1,5 | 2,58                 | 1,05          | 3,28                                  | 3,61                       | 5,71                                 | 1,52                                 | 2,10                          | 1,47                       | 1,02                       | 1,05          | 1,32                    | 0,68                    |
| 4   | 40           | 3   | 5,0 | 1,7 | 1,85                 | 1,09          | 2,38                                  | 3,55                       | 5,63                                 | 1,47                                 | 2,08                          | 1,22                       | 0,95                       | 1,23          | 1,55                    | 0,79                    |
|     |              | 4   | 5,0 | 1,7 | 2,42                 | 1,13          | 3,08                                  | 4,58                       | 7,26                                 | 1,90                                 | 2,68                          | 1,60                       | 1,19                       | 1,22          | 1,53                    | 0,78                    |
|     |              | 5   | 5,0 | 1,7 | 2,98                 | 1,17          | 3,79                                  | 5,53                       | 8,75                                 | 2,30                                 | 3,22                          | 1,95                       | 1,39                       | 1,21          | 1,52                    | 0,78                    |
| 4,5 | 45           | 3   | 5,0 | 1,7 | 2,08                 | 1,21          | 2,65                                  | 5,13                       | 8,13                                 | 2,12                                 | 3,00                          | 1,56                       | 1,24                       | 1,39          | 1,75                    | 0,89                    |
|     |              | 4   | 5,0 | 1,7 | 2,73                 | 1,26          | 3,48                                  | 6,63                       | 0,52                                 | 2,74                                 | 3,89                          | 2,04                       | 1,54                       | 1,38          | 1,74                    | 0,89                    |
|     |              | 5   | 5,0 | 1,7 | 3,37                 | 1,30          | 4,29                                  | 8,03                       | 2,74                                 | 3,33                                 | 4,71                          | 2,51                       | 1,81                       | 1,37          | 1,72                    | 0,88                    |
| 5   | 50           | 3   | 5,5 | 1,8 | 2,32                 | 1,33          | 2,96                                  | 7,11                       | 11,27                                | 2,95                                 | 4,16                          | 1,94                       | 1,57                       | 1,55          | 1,95                    | 1,00                    |
|     |              | 4   | 5,5 | 1,8 | 3,05                 | 1,38          | 3,89                                  | 9,21                       | 14,63                                | 3,80                                 | 5,42                          | 2,54                       | 1,95                       | 1,54          | 1,94                    | 0,99                    |
|     |              | 5   | 5,5 | 1,8 | 3,77                 | 1,42          | 4,80                                  | 11,20                      | 17,77                                | 4,63                                 | 6,57                          | 3,13                       | 2,30                       | 1,53          | 1,92                    | 0,98                    |
|     |              | 6   | 5,5 | 1,8 | 4,47                 | 1,46          | 5,69                                  | 13,07                      | 20,72                                | 5,43                                 | 7,65                          | 3,69                       | 2,63                       | 1,52          | 1,91                    | 0,98                    |
| 5,6 | 56           | 4   | 6,0 | 2,0 | 3,44                 | 1,52          | 4,38                                  | 13,10                      | 20,79                                | 5,41                                 | 7,69                          | 3,21                       | 2,52                       | 1,73          | 2,18                    | 1,11                    |
|     |              | 5   | 6,0 | 2,0 | 4,25                 | 1,57          | 5,41                                  | 15,97                      | 25,36                                | 6,59                                 | 9,41                          | 3,96                       | 2,97                       | 1,72          | 2,16                    | 1,10                    |
| 6,3 | 63           | 4   | 7,0 | 2,3 | 3,90                 | 1,69          | 4,96                                  | 18,86                      | 29,90                                | 7,81                                 | 11,00                         | 4,09                       | 3,26                       | 1,95          | 2,45                    | 1,25                    |
|     |              | 5   | 7,0 | 2,3 | 4,81                 | 1,74          | 6,13                                  | 23,10                      | 36,80                                | 9,52                                 | 13,70                         | 5,05                       | 3,87                       | 1,94          | 2,44                    | 1,25                    |
|     |              | 6   | 7,0 | 2,3 | 5,72                 | 1,78          | 7,28                                  | 27,06                      | 42,91                                | 11,18                                | 15,90                         | 5,98                       | 4,44                       | 1,93          | 2,43                    | 1,24                    |
| 7   | 70           | 4,5 | 8,0 | 2,7 | 4,87                 | 1,88          | 6,20                                  | 29,04                      | 46,03                                | 12,04                                | 17,00                         | 5,67                       | 4,53                       | 2,16          | 2,72                    | 1,39                    |
|     |              | 5   | 8,0 | 2,7 | 5,38                 | 1,90          | 6,86                                  | 31,94                      | 50,67                                | 13,22                                | 18,70                         | 6,27                       | 4,92                       | 2,16          | 2,72                    | 1,39                    |
|     |              | 6   | 8,0 | 2,7 | 6,39                 | 1,94          | 8,15                                  | 37,58                      | 59,64                                | 15,52                                | 22,10                         | 7,43                       | 5,66                       | 2,15          | 2,71                    | 1,38                    |
|     |              | 7   | 8,0 | 2,7 | 7,39                 | 1,99          | 9,42                                  | 42,98                      | 68,19                                | 17,77                                | 25,20                         | 8,57                       | 6,31                       | 2,14          | 2,69                    | 1,37                    |
|     |              | 8   | 8,0 | 2,7 | 8,37                 | 2,02          | 10,67                                 | 48,16                      | 76,35                                | 19,97                                | 28,20                         | 9,68                       | 6,99                       | 2,12          | 2,68                    | 1,37                    |
| 7,5 | 75           | 5   | 9,0 | 3,0 | 5,80                 | 2,02          | 7,39                                  | 39,53                      | 62,65                                | 16,41                                | 23,10                         | 7,21                       | 5,74                       | 2,31          | 2,91                    | 1,49                    |
|     |              | 6   | 9,0 | 3,0 | 6,89                 | 2,06          | 8,78                                  | 46,57                      | 73,87                                | 19,28                                | 27,30                         | 8,57                       | 6,62                       | 2,30          | 2,90                    | 1,48                    |
|     |              | 7   | 9,0 | 3,0 | 7,96                 | 2,10          | 10,15                                 | 53,34                      | 84,61                                | 22,07                                | 31,20                         | 9,89                       | 7,43                       | 2,29          | 2,89                    | 1,47                    |
|     |              | 8   | 9,0 | 3,0 | 9,02                 | 2,15          | 11,50                                 | 59,84                      | 94,89                                | 24,80                                | 35,00                         | 11,18                      | 8,16                       | 2,28          | 2,87                    | 1,47                    |
|     |              | 9   | 9,0 | 3,0 | 10,07                | 2,18          | 12,83                                 | 66,10                      | 104,7                                | 27,48                                | 38,60                         | 12,43                      | 8,91                       | 2,27          | 2,86                    | 1,46                    |

| №<br>уголка | Размеры (мм) |     |      |     | Масса<br>l <sub>M</sub><br>(кг) | x <sub>0</sub><br>(см) | Геометрические характеристики сечений |                                      |                                              |                                              |                                       |                                      |                                      |                        |                                |                                |
|-------------|--------------|-----|------|-----|---------------------------------|------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|             | b            | t   | R    | r   |                                 |                        | A<br>(см <sup>2</sup> )               | I <sub>x</sub><br>(см <sup>4</sup> ) | I <sub>x0</sub><br>max<br>(см <sup>4</sup> ) | I <sub>y0</sub><br>min<br>(см <sup>4</sup> ) | I <sub>xy</sub><br>(см <sup>4</sup> ) | W <sub>x</sub><br>(см <sup>3</sup> ) | W <sub>y</sub><br>(см <sup>3</sup> ) | i <sub>x</sub><br>(см) | i <sub>x0</sub><br>max<br>(см) | i <sub>y0</sub><br>min<br>(см) |
| 8           | 80           | 5,5 | 9,0  | 3,0 | 6,78                            | 2,17                   | 8,63                                  | 52,68                                | 83,56                                        | 21,80                                        | 30,90                                 | 9,03                                 | 7,10                                 | 2,47                   | 3,11                           | 1,59                           |
|             |              | 6   | 9,0  | 3,0 | 7,36                            | 2,19                   | 9,38                                  | 56,97                                | 90,40                                        | 23,54                                        | 33,40                                 | 9,80                                 | 7,60                                 | 2,47                   | 3,11                           | 1,58                           |
|             |              | 7   | 9,0  | 3,0 | 8,51                            | 2,23                   | 10,85                                 | 65,31                                | 103,6                                        | 26,97                                        | 38,30                                 | 11,32                                | 8,55                                 | 2,45                   | 3,09                           | 1,58                           |
|             |              | 8   | 9,0  | 3,0 | 9,65                            | 2,27                   | 12,30                                 | 73,36                                | 116,4                                        | 30,32                                        | 43,00                                 | 12,80                                | 9,44                                 | 2,44                   | 3,08                           | 1,57                           |
| 9           | 90           | 6   | 10,0 | 3,3 | 8,33                            | 2,43                   | 10,61                                 | 82,10                                | 130,0                                        | 33,97                                        | 48,10                                 | 12,49                                | 9,88                                 | 2,78                   | 3,50                           | 1,79                           |
|             |              | 7   | 10,0 | 3,3 | 9,64                            | 2,47                   | 12,28                                 | 94,30                                | 149,6                                        | 38,94                                        | 55,40                                 | 14,45                                | 11,15                                | 2,77                   | 3,49                           | 1,78                           |
|             |              | 8   | 10,0 | 3,3 | 10,93                           | 2,51                   | 13,93                                 | 106,11                               | 168,4                                        | 43,80                                        | 62,30                                 | 16,36                                | 12,34                                | 2,76                   | 3,48                           | 1,77                           |
|             |              | 9   | 10,0 | 3,3 | 12,20                           | 2,55                   | 15,60                                 | 118,00                               | 186,0                                        | 48,60                                        | 68,00                                 | 18,29                                | 13,48                                | 2,75                   | 3,46                           | 1,77                           |
| 10          | 100          | 6,5 | 12,0 | 4,0 | 10,06                           | 2,68                   | 12,82                                 | 122,10                               | 193,4                                        | 50,73                                        | 71,40                                 | 16,69                                | 13,38                                | 3,09                   | 3,89                           | 1,99                           |
|             |              | 7   | 12,0 | 4,0 | 10,79                           | 2,71                   | 13,75                                 | 130,59                               | 207,0                                        | 54,16                                        | 76,40                                 | 17,90                                | 14,13                                | 3,08                   | 3,88                           | 1,98                           |
|             |              | 8   | 12,0 | 4,0 | 12,25                           | 2,75                   | 15,60                                 | 147,19                               | 233,4                                        | 60,92                                        | 86,30                                 | 20,30                                | 15,66                                | 3,07                   | 3,87                           | 1,98                           |
|             |              | 10  | 12,0 | 4,0 | 15,10                           | 2,83                   | 19,24                                 | 178,95                               | 283,8                                        | 74,08                                        | 110,0                                 | 24,97                                | 18,51                                | 3,05                   | 3,84                           | 1,96                           |
|             |              | 12  | 12,0 | 4,0 | 17,90                           | 2,91                   | 22,08                                 | 208,90                               | 330,9                                        | 86,84                                        | 122,0                                 | 29,47                                | 21,10                                | 3,03                   | 3,81                           | 1,95                           |
|             |              | 14  | 12,0 | 4,0 | 20,63                           | 2,99                   | 26,28                                 | 237,15                               | 374,9                                        | 99,32                                        | 138,0                                 | 33,93                                | 23,49                                | 3,00                   | 3,78                           | 1,94                           |
|             |              | 16  | 12,0 | 4,0 | 23,30                           | 3,06                   | 29,68                                 | 263,82                               | 416,0                                        | 111,6                                        | 152,0                                 | 38,04                                | 25,79                                | 2,98                   | 3,74                           | 1,94                           |
| 11          | 110          | 7   | 12,0 | 4,0 | 11,89                           | 2,96                   | 15,15                                 | 175,61                               | 278,5                                        | 72,68                                        | 106,0                                 | 21,83                                | 17,36                                | 3,40                   | 4,29                           | 2,19                           |
|             |              | 8   | 12,0 | 4,0 | 13,50                           | 3,00                   | 17,20                                 | 198,17                               | 314,5                                        | 81,83                                        | 116,0                                 | 24,77                                | 19,29                                | 3,39                   | 4,28                           | 2,18                           |
| 12,5        | 125          | 8   | 14,0 | 4,6 | 15,46                           | 3,36                   | 19,69                                 | 294,36                               | 466,7                                        | 121,98                                       | 172,0                                 | 32,20                                | 25,67                                | 3,87                   | 4,87                           | 2,49                           |
|             |              | 9   | 14,0 | 4,6 | 17,30                           | 3,40                   | 22,00                                 | 327,48                               | 520,0                                        | 135,88                                       | 192,0                                 | 36,00                                | 28,26                                | 3,86                   | 4,86                           | 2,48                           |
|             |              | 10  | 14,0 | 4,6 | 19,10                           | 3,45                   | 24,33                                 | 359,82                               | 571,0                                        | 148,59                                       | 211,0                                 | 39,74                                | 30,45                                | 3,85                   | 4,84                           | 2,47                           |
|             |              | 12  | 14,0 | 4,6 | 22,68                           | 3,53                   | 28,89                                 | 422,23                               | 670,0                                        | 174,43                                       | 248,0                                 | 47,06                                | 34,94                                | 3,82                   | 4,82                           | 2,46                           |
|             |              | 14  | 14,0 | 4,6 | 26,20                           | 3,61                   | 33,37                                 | 481,76                               | 763,9                                        | 199,62                                       | 282,0                                 | 54,17                                | 39,10                                | 3,80                   | 4,78                           | 2,45                           |
|             |              | 16  | 14,0 | 4,6 | 29,65                           | 3,68                   | 37,77                                 | 538,56                               | 852,8                                        | 224,29                                       | 315,0                                 | 61,09                                | 43,10                                | 3,78                   | 4,75                           | 2,44                           |
| 14          | 140          | 9   | 14,0 | 4,6 | 19,41                           | 3,76                   | 24,72                                 | 465,72                               | 739,4                                        | 192,03                                       | 274,0                                 | 45,55                                | 35,92                                | 4,34                   | 5,47                           | 2,79                           |
|             |              | 10  | 14,0 | 4,6 | 21,45                           | 3,82                   | 27,33                                 | 512,29                               | 813,6                                        | 210,96                                       | 301,0                                 | 50,32                                | 39,05                                | 4,33                   | 5,46                           | 2,78                           |
|             |              | 12  | 14,0 | 4,6 | 25,50                           | 3,90                   | 32,49                                 | 602,49                               | 956,9                                        | 248,01                                       | 354,0                                 | 59,66                                | 44,97                                | 4,31                   | 5,43                           | 2,76                           |
| 16          | 160          | 10  | 16,0 | 5,3 | 24,67                           | 4,30                   | 31,43                                 | 774,24                               | 1229,                                        | 319,33                                       | 455,0                                 | 66,19                                | 52,52                                | 4,96                   | 6,25                           | 3,19                           |
|             |              | 11  | 16,0 | 5,3 | 27,02                           | 4,35                   | 34,42                                 | 844,21                               | 1340,                                        | 347,77                                       | 496,0                                 | 72,44                                | 56,53                                | 4,95                   | 6,24                           | 3,18                           |
|             |              | 12  | 16,0 | 5,3 | 29,35                           | 4,39                   | 37,39                                 | 912,89                               | 1450,                                        | 375,78                                       | 537,0                                 | 78,62                                | 60,53                                | 4,94                   | 6,23                           | 3,17                           |
|             |              | 14  | 16,0 | 5,3 | 34,20                           | 4,47                   | 43,57                                 | 1046,47                              | 1662,                                        | 430,81                                       | 615,0                                 | 90,77                                | 68,15                                | 4,92                   | 6,20                           | 3,16                           |
|             |              | 16  | 16,0 | 5,3 | 38,52                           | 4,55                   | 49,07                                 | 1175,19                              | 1865,                                        | 484,64                                       | 690,0                                 | 102,6                                | 75,92                                | 4,89                   | 6,17                           | 3,14                           |
|             |              | 18  | 16,0 | 5,3 | 43,01                           | 4,63                   | 54,79                                 | 1290,24                              | 2061,                                        | 537,46                                       | 771,0                                 | 114,2                                | 82,08                                | 4,87                   | 6,13                           | 3,13                           |
|             |              | 20  | 16,0 | 5,3 | 47,41                           | 4,70                   | 60,40                                 | 1418,85                              | 2248,                                        | 589,43                                       | 830,0                                 | 125,6                                | 90,02                                | 4,85                   | 6,10                           | 3,12                           |
| 18          | 180          | 11  | 16,0 | 5,3 | 30,47                           | 4,85                   | 38,80                                 | 1216,44                              | 1933,                                        | 499,7                                        | 716,0                                 | 92,47                                | 72,86                                | 5,60                   | 7,06                           | 3,59                           |
|             |              | 12  | 16,0 | 5,3 | 33,12                           | 4,89                   | 42,19                                 | 1316,62                              | 2092,                                        | 540,45                                       | 776,0                                 | 100,4                                | 78,15                                | 5,59                   | 7,04                           | 3,58                           |
| 20          | 200          | 12  | 18,0 | 6,0 | 36,97                           | 5,37                   | 47,10                                 | 1822,78                              | 2896,                                        | 749,40                                       | 1073,0                                | 124,6                                | 98,68                                | 6,22                   | 7,84                           | 3,99                           |
|             |              | 13  | 18,0 | 6,0 | 39,92                           | 5,42                   | 50,85                                 | 1960,77                              | 3116,                                        | 805,35                                       | 1156,0                                | 134,4                                | 105,0                                | 6,21                   | 7,83                           | 3,98                           |
|             |              | 14  | 18,0 | 6,0 | 42,80                           | 5,46                   | 54,60                                 | 2097,00                              | 3333,                                        | 861,00                                       | 1236,0                                | 144,1                                | 111,5                                | 6,20                   | 7,81                           | 3,97                           |
|             |              | 16  | 18,0 | 6,0 | 48,65                           | 5,54                   | 61,98                                 | 2362,57                              | 3755,                                        | 969,74                                       | 1393,0                                | 163,3                                | 123,7                                | 6,17                   | 7,78                           | 3,96                           |
|             |              | 20  | 18,0 | 6,0 | 60,08                           | 5,70                   | 76,54                                 | 2871,47                              | 4860,                                        | 1181,9                                       | 1689,0                                | 200,3                                | 146,6                                | 6,12                   | 7,72                           | 3,93                           |
|             |              | 25  | 18,0 | 6,0 | 74,02                           | 5,89                   | 94,29                                 | 3466,21                              | 5494,                                        | 1438,3                                       | 2028,0                                | 245,5                                | 172,6                                | 6,06                   | 7,63                           | 3,91                           |
|             |              | 30  | 18,0 | 6,0 | 87,56                           | 6,07                   | 111,5                                 | 4019,60                              | 6351,                                        | 1698,1                                       | 2332,0                                | 288,5                                | 193,0                                | 6,00                   | 7,55                           | 3,89                           |
| 22          | 220          | 14  | 21,0 | 7,0 | 47,40                           | 5,91                   | 60,38                                 | 2814,36                              | 4470,                                        | 1158,                                        | 1655,0                                | 175,1                                | 138,6                                | 6,83                   | 8,60                           | 4,38                           |
|             |              | 16  | 21,0 | 7,0 | 53,83                           | 6,02                   | 68,58                                 | 3175,44                              | 5045,                                        | 1305,5                                       | 1869,0                                | 198,7                                | 153,3                                | 6,80                   | 8,58                           | 4,36                           |
| 25          | 250          | 16  | 24,0 | 8,0 | 64,65                           | 6,75                   | 78,40                                 | 4717,10                              | 7492,                                        | 1942,0                                       | 2775,0                                | 258,4                                | 203,4                                | 7,76                   | 9,78                           | 4,98                           |
|             |              | 18  | 24,0 | 8,0 | 68,86                           | 6,83                   | 87,72                                 | 5247,24                              | 8336,                                        | 2157,7                                       | 3089,0                                | 288,8                                | 223,3                                | 7,73                   | 9,75                           | 4,96                           |
|             |              | 20  | 24,0 | 8,0 | 76,11                           | 6,91                   | 96,96                                 | 5764,87                              | 9159,                                        | 2370,0                                       | 3395,0                                | 318,7                                | 242,5                                | 7,71                   | 9,72                           | 4,94                           |
|             |              | 22  | 24,0 | 8,0 | 83,31                           | 7,00                   | 106,1                                 | 6270,32                              | 9961,                                        | 2579,0                                       | 3691,0                                | 348,2                                | 260,5                                | 7,69                   | 9,69                           | 4,93                           |
|             |              | 25  | 24,0 | 8,0 | 93,97                           | 7,11                   | 119,7                                 | 7006,39                              | 11125                                        | 2887,2                                       | 4119,0                                | 391,7                                | 287,1                                | 7,65                   | 9,64                           | 4,91                           |
|             |              | 28  | 24,0 | 8,0 | 104,5                           | 7,23                   | 133,1                                 | 7716,86                              | 12243                                        | 3189,8                                       | 4527,0                                | 434,2                                | 311,9                                | 7,61                   | 9,59                           | 4,90                           |
|             |              | 30  | 24,0 | 8,0 | 111,4                           | 7,31                   | 141,9                                 | 8176,82                              | 12964                                        | 3388,9                                       | 4788,0                                | 462,1                                | 327,8                                | 7,59                   | 9,56                           | 4,89                           |
|             |              | 35  | 24,0 | 8,0 | 128,5                           | 7,53                   | 163,7                                 | 9281,05                              | 14682                                        | 3879,3                                       | 5401,68                               | 530,1                                | 366,1                                | 7,53                   | 9,47                           | 4,87                           |

